

航空機構造解析の基本

滝 敏美

2009年8月29日 初回公開
2010年12月29日 改訂15
2011年1月16日 改訂16
2011年3月13日 改訂17
2011年7月3日 改訂18
2011年10月10日 改訂19

最新版のダウンロードは、http://www.geocities.jp/toshimi_taki/index.htm から

航空機構造解析の基本

目次

1	はじめに	1
1.1	必要な基礎知識	1
2	構造解析の手順	2
3	航空機構造解析の基礎知識	4
3.1	どう単純化するか	6
3.2	構造要素	6
3.2.1	1次元部材	7
3.2.2	2次元部材	8
3.2.3	3次元部材	8
3.2.4	継手	9
3.3	境界条件	11
3.3.1	支持条件	11
3.3.2	外部荷重	12
3.3.3	強制変位	13
3.4	内部荷重	14
3.5	力の釣り合いとフリーボディ・ダイヤグラム	14
3.5.1	フリーボディ・ダイヤグラムの描き方	14
3.6	応力と歪	17
3.6.1	応力	17
3.6.1.1	1次元応力	18
3.6.1.2	2次元応力	18
3.6.1.3	2次元応力の座標変換	19
3.6.1.4	2次元応力の主応力	20
3.6.2	歪	24
3.6.2.1	1次元歪	25
3.6.2.2	2次元歪	26
3.6.2.3	2次元歪の座標変換	26
3.6.2.4	2次元歪の主歪	27
3.6.3	フックの法則	28
3.6.3.1	1次元のフックの法則	28
3.6.3.2	2次元（平面応力）のフックの法則	28
3.6.4	歪ゲージによる歪の計測とデータ整理	30
3.6.4.1	歪ゲージ	30
3.6.4.2	歪ゲージを貼る場所	31
3.6.4.3	歪ゲージの計測歪から応力の計算	31
3.7	エネルギー原理	34
3.7.1	歪エネルギーとコンプリメンタリ・エネルギー	34
3.7.1.1	軸力一定の棒要素	35
3.7.1.2	軸力が線形に変化する棒要素	35
3.7.1.3	長方形せん断パネル	36
3.7.2	エネルギー原理の利用方法	37

3.7.2.1	最小ポテンシャル・エネルギーの原理	37
3.7.2.2	最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理	40
3.7.3	補足：MS-Excelによる最小化の方法	40
4	内部荷重の解析	41
4.1	剛体要素の釣り合いとフリーボディ・ダイアグラムの例	41
4.1.1	脚構造のトルク・リンク	41
4.1.2	アイドラー・リンク	42
4.1.3	エンジン取り付け点の反力	44
4.1.4	舵面構造	46
4.1.4.1	解析対象	46
4.1.4.2	力の釣り合い	46
4.2	トラス構造の解析	48
4.2.1	静定2次元トラスの解析	48
4.2.1.1	力の釣り合い式による静定トラスの解析	48
4.2.1.2	最小ポテンシャル・エネルギーの原理による静定トラスの解析	52
4.2.2	不静定2次元トラスの解析	54
4.2.2.1	最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理による不静定トラスの解析	54
4.2.2.2	最小ポテンシャル・エネルギーの原理による不静定トラスの解析	57
4.2.3	3次元トラスの解析	58
4.3	梁理論	60
4.3.1	梁の内部荷重	60
4.3.2	梁の方程式	61
4.3.3	梁の断面の応力	63
4.3.4	静定梁の解析	63
4.3.5	不静定梁の解析	64
4.3.5.1	梁の最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理	64
4.3.5.2	解析例	64
4.3.6	曲がり梁の解析	67
4.3.6.1	梁の歪エネルギー	67
4.3.6.2	梁要素と歪エネルギー	67
4.3.6.3	門型フレームの解析	69
4.3.6.4	胴体フレームの解析	72
4.3.7	せん断応力の分布	79
4.3.7.1	矩形断面梁のせん断応力	79
4.3.7.2	円形断面梁のせん断応力	81
4.3.7.3	薄肉I型断面梁のせん断応力	82
4.3.7.4	角チューブのせん断応力	86
4.3.7.5	薄肉円筒のせん断応力	87
4.3.7.6	梁のせん断応力の式のまとめ	88
4.4	薄肉断面のねじり	89
4.4.1	薄肉閉断面のねじり	89
4.4.1.1	薄肉円筒断面のねじり	89
4.4.1.2	薄肉矩形断面のねじり	90
4.4.1.3	薄肉一般閉断面のねじり	91
4.4.2	薄肉開断面のねじり	92

4.4.2.1	帯板のねじり	92
4.4.2.2	薄肉開円筒断面のねじり	93
4.4.2.3	薄肉一般開断面のねじり	94
4.4.2.4	チャンネル断面のせん断中心	94
4.4.3	ディファレンシャル・ベンディング	95
4.5	箱桁構造	96
4.5.1	1本桁構造の曲げねじり	96
4.5.2	対称2本桁構造の曲げねじり	99
4.5.3	非対称2本桁構造の曲げねじり	103
4.5.4	胴体フレームの荷重	107
4.5.5	梁理論と純ねじり理論の限界	110
4.6	薄板構造の解析法 – せん断場理論	113
4.6.1	せん断場理論とは	113
4.6.2	集中荷重が入る壁構造	113
4.6.2.1	壁構造（その1）	114
4.6.2.2	壁構造（その2）	116
4.6.2.3	壁構造（その3）	119
4.6.3	台形のせん断パネル	122
4.6.4	せん断梁	123
4.6.4.1	一定高さのせん断梁	123
4.6.4.2	高さがテーパしたせん断梁	125
4.6.4.3	切り欠きのあるせん断梁	125
4.6.5	切り欠きのある2本桁構造のねじり	131
4.6.6	切り欠きのある2本桁構造の曲げねじり	139
4.6.7	せん断場理論のまとめ	144
4.7	重要な構造要素の内部荷重	145
4.7.1	キックフォース	145
4.7.2	バランス・アーム	146
4.7.3	せん断クリップ	147
4.7.4	インターコストル	148
4.7.5	内圧が負荷される円筒	151
4.7.6	胴体ストリングが受け持つ与圧荷重	152
4.7.6.1	円筒殻の理論による解法	153
4.7.6.2	エネルギー法による解法	157
4.7.7	平板耐圧隔壁	162
4.7.7.1	圧力が負荷される長方形平板	162
4.7.7.2	平板耐圧隔壁の内部荷重	168
4.7.8	リブのクラッシュ荷重 – Brazier 効果	170
4.8	ファスナ継手の解析	172
4.8.1	せん断荷重の伝達	172
4.8.1.1	せん断ウェブとコードの結合	172
4.8.1.2	桁と外板の結合	172
4.8.1.3	ストリングと外板の結合	173
4.8.1.4	ウェブへの集中荷重の導入	174
4.8.2	軸力の伝達	175

4.8.2.1	ファスナの等価ばね剛性	175
4.8.2.2	多列ファスナ継手のファスナ荷重分担の解析法 – 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理	177
4.8.2.3	多列ファスナ継手のファスナ荷重分担の解析法 – 最小ポテンシャル・エネルギーの原理	179
4.8.2.4	多列ファスナ継手のファスナ荷重分担のチャート	181
4.8.3	ファスナグループ	183
4.9	内部荷重の非線形性の考慮	185
5	有限要素法の使い方	187
5.1	有限要素法とは	187
5.2	NASTRAN の主な要素	189
5.2.1	座標系	189
5.2.2	自由度	189
5.2.3	要素の種類	189
5.2.3.1	棒要素 (ROD)	189
5.2.3.2	梁要素 (BAR, BEAM)	190
5.2.3.3	せん断パネル要素 (SHEAR)	191
5.2.3.4	三角形板要素 (TRIA3, TRIAR)	191
5.2.3.5	四辺形板要素 (QUAD4, QUADR)	192
5.3	モデルの作成	192
5.3.1	モデル化の手順	192
5.3.1.1	拘束条件	192
5.3.1.2	荷重の負荷	192
5.3.1.3	強制変位の負荷	192
5.4	有限要素解析の注意事項	193
5.5	有限要素解析結果のチェック方法	194
5.5.1	解析が流れるようになるまで	194
5.5.2	解析結果のチェック・リスト	194
5.6	航空機構造の FEM モデル化の方法	195
5.7	FEM 解析結果の使い方	195
5.7.1	要素力と節点力	195
5.7.2	せん断場理論との比較	195
5.7.2.1	せん断梁のモデル化の比較	196
5.7.2.2	壁構造の比較	199
5.7.2.3	テーパしたせん断梁の比較	202
5.7.2.4	切り欠きのあるせん断梁の比較	204
5.7.2.5	切り欠きのある箱桁梁の比較	206
6	静強度の判定	208
6.1	設計基準	208
6.1.1	制限荷重	208
6.1.2	安全率と終極荷重	208
6.1.3	特別係数	208
6.1.4	クライテリア荷重	208
6.1.5	座屈に関する強度基準	208
6.2	強度計算の流れ	209
6.3	安全余裕	209
6.4	材料強度	211

6.4.1	アルミ合金の種類	211
6.4.2	設計許容値	212
6.4.2.1	設計許容値とは	212
6.4.2.2	設計許容値の説明	212
6.4.3	材料のデータシートの例	214
6.4.4	応力-歪曲線の例	215
6.5	破壊の形態	216
6.5.1	軸力部材の引張破壊	216
6.5.2	軸力部材の圧縮破壊	217
6.5.2.1	材料圧縮破壊	217
6.5.2.2	長柱座屈	218
6.5.2.3	長柱座屈荷重のエネルギー法による解析	222
6.5.2.4	ねじれ座屈	228
6.5.2.5	クリップリング	238
6.5.2.6	クリップリング応力の計算例	249
6.5.2.7	短柱の破壊	254
6.5.3	梁の破壊	259
6.5.3.1	弾性曲げ	259
6.5.3.2	塑性曲げ	262
6.5.3.3	横倒れ座屈	277
6.5.4	ビームカラム	281
6.5.5	板の座屈	286
6.5.5.1	矩形平板の圧縮座屈	286
6.5.5.2	矩形平板のせん断座屈	287
6.5.5.3	矩形平板の曲げ座屈	288
6.5.5.4	組み合わせ荷重下の矩形平板の座屈	294
6.5.5.5	矩形平板の座屈応力の計算例	298
6.5.5.6	曲面板の圧縮座屈	300
6.5.5.7	曲面板のせん断座屈	303
6.5.5.8	曲面板の組み合わせ荷重下の座屈	306
6.5.5.9	板の座屈係数の近似式	306
6.5.6	せん断梁の破壊	310
6.5.6.1	Shear Resistant Beam	311
6.5.6.2	張力場	313
6.5.7	圧縮荷重を受ける補強パネル	332
6.5.7.1	圧縮荷重を受ける補強平板パネルの破壊モード	332
6.5.7.2	補強平板パネルの圧縮局所座屈	334
6.5.7.3	補強パネルの全体圧縮座屈	338
6.5.7.4	補強パネルの座屈応力計算例	339
6.5.7.5	座屈後強度 - 有効幅	342
6.5.7.6	板の鋸間座屈	349
6.5.8	継手強度	351
6.5.8.1	ファスナの種類	354
6.5.8.2	ファスナせん断継手の強度	359
6.5.8.3	ファスナ継手の強度計算例	373

6.5.8.4	ラグとピンの強度計算法	376
6.5.8.5	引張金具の強度	394
6.5.8.6	テンション・クリップの強度	395
6.6	強度判定の注意事項	410
7	疲労強度	411
7.1	疲労破壊	411
7.2	疲労破壊の例	411
7.3	材料の疲労強度	414
7.3.1	材料の疲労データ	414
7.3.2	マイナー側	417
7.3.3	レイン・フロー・カウンティング	418
7.4	構造の疲労強度	424
7.4.1	構造の応力集中	427
7.4.2	ファスナ継手の応力集中係数	431
7.4.3	疲労寿命の安全率	437
7.4.4	構造の疲労寿命の計算例	438
8	強度計算書	445
8.1	強度計算書の使われ方	445
8.2	強度計算書の構成と内容	445
9	補足	447
9.1	単位の換算	447
9.2	座標変換式	447
9.3	Bruhn の教科書の目次と索引	451
9.4	蛇足	482
10	参考文献	487
10.1	教科書	487
10.2	文献	487
	あとがき	492
	完成時のあとがき	492
	改訂履歴	494

図のリスト

図 2-1	航空機構造解析の流れ.....	3
図 3-1	T-45A の構造概要.....	4
図 3-2	A319 の構造概要.....	5
図 3-3	自由度.....	11
図 3-4	単純支持.....	12
図 3-5	梁の支持の例 – 固定支持と単純支持.....	12
図 3-6	外部荷重 – 集中荷重と分布荷重.....	12
図 3-7	トラスのフリーボディ・ダイヤグラム.....	15
図 3-8	舵面のヒンジ金具のフリーボディ・ダイヤグラム.....	16
図 3-9	応力の定義.....	17
図 3-10	1次元の応力 – 棒要素.....	18
図 3-11	2次元応力 – 面内板要素.....	18
図 3-12	2次元応力の座標変換.....	19
図 3-13	1軸応力の座標変換.....	21
図 3-14	純せん断応力の座標変換.....	22
図 3-15	純せん断応力.....	22
図 3-16	2軸応力の成分が等しい場合の座標変換.....	23
図 3-17	2軸応力の成分が等しい場合.....	23
図 3-18	歪の定義.....	24
図 3-19	1次元歪.....	25
図 3-20	2次元歪.....	26
図 3-21	フックの法則.....	28
図 3-22	直交異方性材料の主軸.....	30
図 3-23	歪ゲージの構造（東京測器研究所の資料より）.....	31
図 3-24	歪ゲージの種類（東京測器研究所の資料より）.....	31
図 3-25	軸力部材の歪ゲージ.....	32
図 3-26	せん断ウェブの歪ゲージ.....	32
図 3-27	板の歪ゲージ.....	33
図 3-28	ばねの歪エネルギーとコンプリメンタリ・エネルギー.....	34
図 3-29	棒要素の歪エネルギーとコンプリメンタリ・エネルギー.....	35
図 3-30	軸力が線形に変化する棒要素.....	36
図 3-31	長方形せん断パネル.....	36
図 3-32	2本のばね.....	37
図 3-33	2本のばねの問題の荷重 – 変位線図.....	39
図 4-1	トルク・リンク.....	41
図 4-2	アイドラー・リンク.....	42
図 4-3	ボルトに入る荷重.....	43
図 4-4	エンジン・マウントの形式の種類 – ジェット戦闘機.....	44
図 4-5	エンジン・マウントの荷重の取り方 – F-104 または F-14 タイプ.....	44
図 4-6	エンジン・マウントの反力の例題.....	45
図 4-7	舵面構造.....	46
図 4-8	トラス構造としての単純化.....	48
図 4-9	静定トラス構造の例題.....	49

図 4-10	トラス構造のフリーボディ・ダイヤグラム	50
図 4-11	静定トラス構造の例題の解析結果	51
図 4-12	不静定トラスの例題	54
図 4-13	不静定トラスの例題の解析結果	57
図 4-14	3次元静定トラスの例題	58
図 4-15	梁の座標系と荷重の向き	60
図 4-16	梁の力の釣り合い	61
図 4-17	梁の方程式	62
図 4-18	梁の荷重分布 - 両端単純支持梁の中央に集中荷重が負荷される場合	63
図 4-19	梁の荷重分布 - 両端単純支持梁に一様分布荷重が負荷される場合	63
図 4-20	集中荷重がはたらく両端固定梁	65
図 4-21	3点支持梁	66
図 4-22	梁要素の変形と荷重	68
図 4-23	門型フレーム	69
図 4-24	門型フレームの変形	69
図 4-25	門型フレームの曲げモーメントの分布	70
図 4-26	床荷重が負荷される胴体フレーム	73
図 4-27	胴体フレームの要素分割	73
図 4-28	床荷重 V と釣り合う外板せん断流分布	74
図 4-29	外板せん断力の節点荷重への変換	74
図 4-30	胴体フレームの変形と曲げモーメント分布	78
図 4-31	矩形断面梁のせん断応力	80
図 4-32	円形断面梁のせん断応力	82
図 4-33	薄肉 I 型断面梁のせん断応力	83
図 4-34	薄肉 I 型断面梁のせん断応力分布の数値例	83
図 4-35	薄肉 I 型断面梁のフランジのせん断応力	84
図 4-36	薄肉 I 型断面梁のせん断応力とせん断流の分布	85
図 4-37	角チューブ断面と I 型断面の関係	86
図 4-38	角チューブ断面梁のせん断応力とせん断流の分布	86
図 4-39	薄肉円筒断面のせん断流の分布	87
図 4-40	梁の断面のせん断応力の説明図	88
図 4-41	薄肉円筒のねじり	89
図 4-42	薄肉矩形断面のねじり	90
図 4-43	薄肉一般閉断面のねじり	91
図 4-44	ねじれ角	92
図 4-45	帯板のねじり	92
図 4-46	円筒開断面と閉断面のねじりの比較	93
図 4-47	薄肉一般開断面のねじり	94
図 4-48	チャンネル断面のせん断中心	95
図 4-49	ディファレンシャル・ベンディングの例	95
図 4-50	片持ち 1 本桁構造	96
図 4-51	1 本桁構造の荷重分布	97
図 4-52	1 本桁構造のせん断流の計算 - $0 < x < 800$	97
図 4-53	1 本桁構造のせん断流の分布	98
図 4-54	1 本桁構造 - $x = 800$ リブの力の釣り合い	98

図 4-55	2本桁構造の曲げねじり	99
図 4-56	2本桁構造の断面詳細	99
図 4-57	2本桁構造の断面のモデル	100
図 4-58	断面の一部を切断したときのせん断流の分布	101
図 4-59	トルクボックスで受け持つねじりモーメントによるせん断流	102
図 4-60	2本桁構造のせん断流の分布	102
図 4-61	非対称2本桁構造の曲げねじり	103
図 4-62	断面の主軸への座標変換	103
図 4-63	非対称2本桁構造の弾性主軸	104
図 4-64	非対称2本桁構造のせん断流 - 外板の一部を切断した場合	105
図 4-65	非対称2本桁構造のせん断流の分布	106
図 4-66	胴体フレームに入る外荷重	107
図 4-67	胴体外板のせん断流の計算結果 - 外板を切断した場合	108
図 4-68	胴体外板のせん断流とフレームの力の釣り合い	109
図 4-69	せん断遅れの例	110
図 4-70	箱型梁に集中力または集中トルクが働く例	112
図 4-71	実際の胴体構造 - Boeing 777 (左), Boeing 747 の胴体の一部 (右)	113
図 4-72	せん断ウェブへの集中荷重の導入	114
図 4-73	壁に集中荷重が入る構造 (その1)	114
図 4-74	フリーボディ・ダイヤグラム - 壁構造 (その1)	115
図 4-75	内部荷重 - 壁構造 (その1)	115
図 4-76	壁に集中荷重がはいる構造 (その2)	116
図 4-77	フリーボディ・ダイヤグラム - 壁構造 (その2)	117
図 4-78	内部荷重 - 壁構造 (その2)	119
図 4-79	壁構造 (その3)	120
図 4-80	フリーボディ・ダイヤグラム - 壁構造 (その3)	120
図 4-81	内部荷重の計算結果 - 壁構造 (その3)	121
図 4-82	台形のせん断パネル	122
図 4-83	梁のせん断場理論のモデル化	123
図 4-84	せん断場理論による一定高さの片持ちせん断梁の内部荷重分布	124
図 4-85	断面 A-A 内のウェブせん断流分布の比較	124
図 4-86	高さがテーパしたせん断梁	125
図 4-87	切り欠きのあるせん断梁	126
図 4-88	切り欠きのある梁のフリーボディ・ダイヤグラム	126
図 4-89	ウェブのせん断流 - 切り欠きのあるせん断梁	128
図 4-90	Bruhn の本の方法で解いた切り欠きのあるせん断梁	130
図 4-91	切り欠きのある対称2本桁構造のねじり	131
図 4-92	桁のディファレンシャル・ベンディング	132
図 4-93	ベイ①とベイ③のフリーボディ・ダイヤグラム	133
図 4-94	Bruhn の本の方法によるせん断流の計算結果	133
図 4-95	切り欠きのある対称2本桁構造のねじり - フリーボディ・ダイヤグラム	134
図 4-96	内部荷重 - 切り欠きのある対称2本桁構造のねじり	137
図 4-97	切り欠きがない場合の内部荷重	138
図 4-98	切り欠きのある対称2本桁構造の曲げねじり	140
図 4-99	切り欠きのある対称2本桁構造の曲げねじり - フリーボディ・ダイヤグラム	140

図 4-100	切り欠きのある2本桁構造の曲げねじり – 内部荷重分布	144
図 4-101	キックフォース	145
図 4-102	曲がったフレームのキックフォース	145
図 4-103	前脚組	146
図 4-104	せん断クリップ (その1)	147
図 4-105	せん断クリップ (その2)	147
図 4-106	フレーム面外の荷重とインターコストル	148
図 4-107	インターコストルのフリーボディ・ダイヤグラム	148
図 4-108	与圧胴体開口部のインターコストル	149
図 4-109	ストップ金具バックアップのインターコストルの具体例	150
図 4-110	ストップ金具バックアップのインターコストルのフリーボディ・ダイヤグラム	150
図 4-111	内圧が負荷される円筒	151
図 4-112	内圧が負荷される円筒の周方向応力と軸方向応力	151
図 4-113	輸送機の胴体径と外板板厚との関係	152
図 4-114	ストリングが受け持つ与圧荷重	152
図 4-115	長さ L の円筒の荷重ケース	154
図 4-116	リングに働く荷重	154
図 4-117	フレーム/ストリングからなる胴体のモデル	155
図 4-118	ストリングが受け持つ与圧荷重の計算モデル	158
図 4-119	外板の周方向荷重の分布	161
図 4-120	ストリングの面外荷重の分布	161
図 4-121	耐圧隔壁の例	162
図 4-122	面外荷重を受ける長方形平板	162
図 4-123	圧力を受ける長方形平板の応力 – 微小変形	164
図 4-124	圧力を受ける長方形平板の中央のたわみ – 微小変形	164
図 4-125	板の大たわみの影響	165
図 4-126	圧力を受ける平板 – 縦横比が大きい場合	166
図 4-127	圧力を受ける平板の応力 – 大変形, 縦横比が大きい場合 ($a/b > 2.0$ に適用可)	167
図 4-128	圧力を受ける平板の中央のたわみ – 大変形, 縦横比が大きい場合 ($a/b > 2.0$ に適用可)	167
図 4-129	平板耐圧隔壁の荷重の流れ	168
図 4-130	スティフナの荷重 – 平板耐圧隔壁	169
図 4-131	ビームの荷重 – 平板耐圧隔壁	169
図 4-132	リブのクラッシュ荷重	170
図 4-133	せん断梁のウェブとコードの結合	172
図 4-134	桁と外板の結合 – Build-up 構造の場合	173
図 4-135	桁と外板の結合 – 一体桁構造の場合	173
図 4-136	ストリングと外板の結合	174
図 4-137	ウェブへの集中荷重の導入	174
図 4-138	軸力を伝達する多列ファスナ継手	175
図 4-139	ファスナの等価ばね剛性の定義	175
図 4-140	多列ファスナ継手の釣り合い	177
図 4-141	多列ファスナ継手の解析例	178
図 4-142	多列ファスナ継手の変形	179
図 4-143	ファスナの等価ばね剛性	181
図 4-144	アルミ合金のシングルラップ継手のファスナ荷重分担	182

図 4-145	ファスナグループ解析	183
図 4-146	ファスナグループ解析の例題	184
図 4-147	ファスナグループ解析結果	184
図 5-1	Boeing 747SP の全機 FEM モデル	188
図 5-2	F-16 Block 52+ の全機 FEM モデル	188
図 5-3	有限要素法における自由度	189
図 5-4	棒要素 (ROD)	189
図 5-5	梁要素 (BAR)	190
図 5-6	梁要素 (BEAM)	190
図 5-7	せん断パネル要素 (SHEAR)	191
図 5-8	三角形板要素 (TRIA3, TRIAR)	191
図 5-9	四辺形板要素 (QUAD4, QUADR)	192
図 5-10	FEM 解析におけるモデル化の手順	193
図 5-11	要素力と節点力	195
図 5-12	片持ちせん断梁	196
図 5-13	せん断パネル要素によるモデル化	197
図 5-14	変形 - SHEAR 要素によるモデル化, モデル A	198
図 5-15	要素力と節点力 - モデル A, B	198
図 5-16	節点力の釣り合い - モデル A, B	199
図 5-17	壁構造 (3) の FEM モデル	200
図 5-18	壁構造 (3) の変形図	200
図 5-19	壁構造 (3) の要素力と節点力	201
図 5-20	テーパ梁の FEM モデル	202
図 5-21	テーパ梁の変形	202
図 5-22	テーパ梁の要素力	203
図 5-23	切り欠きのあるせん断梁の FEM モデル	204
図 5-24	切り欠きのあるせん断梁の変形	204
図 5-25	切り欠きのあるせん断梁の要素力と節点力	205
図 5-26	切り欠きのある箱桁梁の FEM モデル	206
図 5-27	切り欠きのある箱桁梁の要素力と節点力	207
図 6-1	許容値	212
図 6-2	応力-歪曲線	213
図 6-3	結晶粒の向きの定義	214
図 6-4	応力-歪曲線の例 - 2024-T3	215
図 6-5	穴がある場合の静破壊時の応力分布	216
図 6-6	長柱座屈	218
図 6-7	初期不整がある場合の横変形	219
図 6-8	長柱座屈の実験 - 端末支持条件による変形と座屈荷重の違い	221
図 6-9	端末拘束条件の例	221
図 6-10	長柱座屈の問題	222
図 6-11	軸方向の変位の計算式	222
図 6-12	長柱座屈の数値例	223
図 6-13	座屈変形	223
図 6-14	長柱座屈の解析の要素分割と座屈変形	225
図 6-15	アングル断面の柱のねじれ座屈	228

図 6-16	非対称断面	229
図 6-17	2つの軸に関して対称な断面の例	230
図 6-18	1つの軸に対して対称な断面の例	230
図 6-19	H型断面 – 数値例	234
図 6-20	H型断面の柱の座屈応力の数値例	235
図 6-21	等辺アングル断面の数値例	236
図 6-22	等辺アングル断面の柱の座屈応力の数値例	236
図 6-23	等辺アングルの曲げねじれ座屈応力 – 板厚の影響	237
図 6-24	クリッピング破壊	238
図 6-25	平板の圧縮	239
図 6-26	平板要素への分割のしかた	242
図 6-27	平板要素のクリッピング応力 – 無次元表示	242
図 6-28	リップとバルブによるフランジの補強	243
図 6-29	リップの効果	243
図 6-30	バルブの効果	244
図 6-31	アングル要素への分割 – Needham の方法	246
図 6-32	アングル要素のクリッピング応力 – Needham の方法	246
図 6-33	薄肉断面の分類 – クリッピング応力計算	248
図 6-34	切断数とフランジ数 – クリッピング応力計算	248
図 6-35	クリッピングの例題1 – Z型板曲げ材	249
図 6-36	クリッピングの例題2 – バルブ付きアングル	250
図 6-37	クリッピングの例題3 – J型材	252
図 6-38	柱の圧縮強度／破壊モードのまとめ	254
図 6-39	ジョンソン-オイラーの式	255
図 6-40	接線剛性の定義	256
図 6-41	Ramberg-Osgood の式	257
図 6-42	接線剛性理論の実験値との比較	258
図 6-43	塑性座屈応力のグラフ – 7050-T7451, Plate	258
図 6-44	梁の曲げ応力	259
図 6-45	薄肉断面の曲げ – クリッピング破壊と座屈破壊	260
図 6-46	梁の断面内のせん断応力の分布の例	261
図 6-47	塑性領域の曲げ	262
図 6-48	7050-T7451 Plate の応力-歪曲線と Ramberg-Osgood の式	266
図 6-49	矩形断面の曲げモーメントの数値例 – 7050-T7451, Plate	266
図 6-50	矩形断面の梁の塑性領域の応力分布 – 材料 7050-T7451	267
図 6-51	Cozzone の方法で仮定する曲げ応力分布	267
図 6-52	塑性曲げ応力-歪曲線の例	268
図 6-53	実際の応力分布と Cozzone の方法の応力分布の比較 ($f_{max} = 70\text{ksi}$) – 7050-T7451, Plate	268
図 6-54	一般の1軸対称断面の塑性曲げ	269
図 6-55	断面形状係数 K	269
図 6-56	I型断面の塑性曲げ	270
図 6-57	数値積分による塑性曲げの解析	273
図 6-58	Newton 法による Ramberg-Osgood の式の解き方	273
図 6-59	数値積分による塑性曲げの計算例 – 円形断面	274
図 6-60	円形断面の塑性曲げの応力分布	274

図 6-61	数値積分による塑性曲げの計算例 – I 型断面	276
図 6-62	矩形断面の塑性曲げの応力分布	276
図 6-63	I 型断面梁の横倒れ座屈 – 4 点曲げ試験	277
図 6-64	横倒れ座屈を防止する方法の例	277
図 6-65	I 型断面梁の純曲げの場合の横倒れ座屈	278
図 6-66	I 型断面片持ち梁の横倒れ座屈	279
図 6-67	一様荷重が負荷される単純支持の I 型断面梁	280
図 6-68	横倒れ座屈係数 – 一様分布荷重が負荷される単純支持 I 型断面梁	280
図 6-69	ビームカラムの例	282
図 6-70	ビームカラムの数値例 – 変位	283
図 6-71	ビームカラムの数値例 – 曲げモーメント	283
図 6-72	ビームカラムの数値例 – 圧縮軸力と変形の関係	284
図 6-73	ビームカラムの数値例 – 圧縮軸力と曲げモーメントの関係	284
図 6-74	門型フレームの変形と最大曲げモーメント – ビームカラム効果	285
図 6-75	圧縮座屈変形 – 周辺単純支持の場合	286
図 6-76	せん断座屈変形 – 周辺単純支持の場合	288
図 6-77	曲げ座屈変形 – 周辺単純支持の場合	289
図 6-78	矩形平板の圧縮座屈係数	290
図 6-79	圧縮座屈の塑性の補正	290
図 6-80	矩形平板のせん断座屈係数	291
図 6-81	せん断座屈の塑性の補正	291
図 6-82	矩形平板の曲げ座屈係数	292
図 6-83	矩形平板の曲げ座屈係数 – 1 側辺固定, 1 側辺自由	293
図 6-84	軸圧縮+曲げ座屈の安全余裕	295
図 6-85	せん断+曲げ座屈の安全余裕	295
図 6-86	軸荷重+せん断座屈の安全余裕	296
図 6-87	圧縮+せん断+曲げ座屈の相互作用曲線	297
図 6-88	圧縮+せん断+曲げ座屈の安全余裕	297
図 6-89	2024-T3 Sheet 材の応力-歪曲線	299
図 6-90	圧縮荷重とせん断荷重が負荷される矩形平板の座屈荷重計算例	299
図 6-91	円筒の圧縮座屈係数 – 理論値と試験値の比較	301
図 6-92	円筒の座屈荷重が理論値よりも小さくなる理由	301
図 6-93	曲面板の圧縮座屈係数	302
図 6-94	曲面板のせん断座屈係数 – 単純支持	304
図 6-95	曲面板のせん断座屈係数 – 固定支持	304
図 6-96	曲面板のせん断座屈係数 – 単純支持	305
図 6-97	曲面板のせん断座屈係数 – 固定支持	305
図 6-98	水平尾翼のせん断梁	310
図 6-99	ウェブのせん断座屈を許さないせん断梁の例 – 補強材 (スティフナ) 付きウェブ	311
図 6-100	Shear Resistant Beam の補強材の必要曲げ剛性	312
図 6-101	張力場	313
図 6-102	胴体外板のしわ	313
図 6-103	張力場の説明	314
図 6-104	完全張力場のモデル	315
図 6-105	張力場によって生じるフランジの曲げとスティフナの圧縮荷重	315

図 6-106	完全張力場と不完全張力場	316
図 6-107	張力場梁の強度計算	317
図 6-108	組立梁のウェブのせん断座屈係数	322
図 6-109	張力場係数	322
図 6-110	スティフナの最大圧縮応力	323
図 6-111	ウェブの最大せん断応力の補正係数	323
図 6-112	スティフナの強制クリッピング破壊	324
図 6-113	半張力場梁の強度計算の手順	324
図 6-114	張力場梁の例題	325
図 6-115	フランジとスティフナの断面形状	325
図 6-116	結合ファスナと結合強度	326
図 6-117	スティフナの座屈チャート	329
図 6-118	作用荷重とウェブのせん断応力, せん断許容応力との関係	331
図 6-119	作用荷重とスティフナの圧縮応力, 強制クリッピング許容応力との関係	331
図 6-120	圧縮荷重を受ける補強パネル	332
図 6-121	補強パネルの座屈変形	333
図 6-122	圧縮を受ける補強パネルの破壊モード	333
図 6-123	補強パネルの局所座屈変形	334
図 6-124	ブレード型スティフナ付き補強パネルの圧縮座屈係数	335
図 6-125	Z型スティフナ付き補強パネルの圧縮座屈係数	335
図 6-126	I型スティフナ付き補強パネルの圧縮座屈係数	336
図 6-127	Yusuff の補強パネルの座屈計算式のモデル	338
図 6-128	ブレード型スティフナ補強パネルの例	339
図 6-129	Yusuff の式による局所座屈応力の計算 - 例題 1	340
図 6-130	Z型スティフナ補強パネルの例	341
図 6-131	補強平板の応力分布と有効幅	343
図 6-132	有効幅の計算式の考え方 - von Karman による	344
図 6-133	有効幅の式と実験値の比較	344
図 6-134	有効幅の式のまとめ	345
図 6-135	外板とスティフナの材料定数が異なる場合の有効幅の補正	345
図 6-136	鋸間座屈	349
図 6-137	鋸間座屈の塑性の補正	350
図 6-138	主翼構造のファスナ結合の例	351
図 6-139	胴体構造のファスナ結合の例	352
図 6-140	ラグ結合の例 - A300 垂直尾翼/胴体結合	352
図 6-141	引張金具結合の例	353
図 6-142	リベット	355
図 6-143	ブランドリベットの例	356
図 6-144	ハイロックピン/カラー (せん断用)	356
図 6-145	ハイロックのデータシートの例	357
図 6-146	せん断ボルトと引張ボルトの例	359
図 6-147	ファスナ継手の種類	359
図 6-148	ファスナ継手の荷重	360
図 6-149	母材の破壊モード	360
図 6-150	ファスナせん断継手の望ましい寸法	361

図 6-151	シングルシア継手強度.....	361
図 6-152	せん断皿頭ハイロックのせん断継手強度.....	372
図 6-153	せん断出っ張り頭ハイロックのせん断継手強度.....	372
図 6-154	2列リベット継手.....	373
図 6-155	3列リベット継手.....	374
図 6-156	皿頭ハイロック継手.....	375
図 6-157	ラグを使った結合の部品構成.....	376
図 6-158	ラグの詳細 FEM モデル.....	377
図 6-159	ラグの穴の周囲の周方向応力の分布.....	377
図 6-160	ラグの周方向応力の x 方向の分布.....	378
図 6-161	ラグの穴の周囲の半径方向応力（面圧応力）の分布.....	378
図 6-162	ラグの形状.....	379
図 6-163	ストレートラグの弾性応力集中係数 - チャート A.....	383
図 6-164	弾性応力集中係数と面圧係数の関係 - チャート B.....	383
図 6-165	テーパ角と弾性応力集中係数の関係 - チャート C.....	384
図 6-166	荷重の方向の影響 - 45度テーパラグ - チャート D.....	384
図 6-167	偏心の影響 - チャート E.....	385
図 6-168	ピンの荷重.....	386
図 6-169	2枚ラグ結合の強度計算例 1.....	388
図 6-170	2枚ラグ結合の強度計算例 2.....	391
図 6-171	引張金具の種類.....	394
図 6-172	テンション・クリップ.....	396
図 6-173	T型材テンション・クリップの例.....	397
図 6-174	解析モデル - T型材テンション・クリップ.....	398
図 6-175	変形と反力 - T型材テンション・クリップ.....	399
図 6-176	曲げモーメント分布 - T型材テンション・クリップ.....	399
図 6-177	背中合わせのアングルのテンション・クリップの例.....	401
図 6-178	解析モデル - 背中合わせのアングルのテンション・クリップ.....	402
図 6-179	変形と反力 - 背中合わせのアングルのテンション・クリップ.....	403
図 6-180	曲げモーメント分布 - 背中合わせのアングルのテンション・クリップ.....	404
図 6-181	片持ちアングルのテンション・クリップの例.....	405
図 6-182	解析モデル - 片持ちアングルのテンション・クリップ.....	406
図 6-183	変形 - 片持ちアングルのテンション・クリップ.....	407
図 6-184	曲げモーメント分布 - 片持ちアングルのテンション・クリップ.....	407
図 6-185	片持ち型材アングルのテンション・クリップの破壊の例.....	408
図 6-186	テンション・クリップの引張許容荷重 - 2024-T3 クラッド板曲げアングル材.....	409
図 6-187	テンション・クリップの引張許容荷重 - 2024-T4 アングル型材.....	409
図 7-1	アロハ航空ボーイング737の胴体の破壊（1988年）.....	411
図 7-2	C-130 輸送機の中央翼の疲労 - 中央翼.....	412
図 7-3	C-130 輸送機の中央翼の疲労 - 下面外板の疲労亀裂.....	412
図 7-4	C-130 輸送機の中央翼の疲労 - 下面外板の疲労亀裂の断面.....	413
図 7-5	2024-T3 板材の疲労データ ($K_{t,net} = 2.0$).....	415
図 7-6	疲労試験片, $K_t = 2.0$	416
図 7-7	ネット応力と応力集中係数の定義.....	416
図 7-8	繰り返し応力の定義.....	417

図 7-9	変化する繰り返し応力.....	417
図 7-10	不規則に変動する応力.....	419
図 7-11	レイン・フロー・カウンティングのアルゴリズム.....	419
図 7-12	レイン・フロー・カウンティングの例.....	420
図 7-13	レイン・フロー・カウンティングの結果.....	421
図 7-14	繰り返す応力履歴の簡略化されたレイン・フロー・カウンティングのアルゴリズム.....	421
図 7-15	繰り返す応力履歴の簡略化されたレイン・フロー・カウンティングの例.....	422
図 7-16	繰り返す応力履歴のレイン・フロー・カウンティングの結果.....	423
図 7-17	主翼下面外板の応力.....	425
図 7-18	フライトパターン – エアライナー.....	425
図 7-19	主翼下面外板の応力履歴の説明.....	426
図 7-20	Boeing 747 の主翼下面外板の応力履歴.....	426
図 7-21	一様引張応力が働く無限平板中の円孔の応力集中.....	427
図 7-22	B-52G の主翼下面外板の応力集中箇所.....	428
図 7-23	Saab 105 - SK 60 の主翼の疲労亀裂.....	428
図 7-24	Saab 32 Lansen の主翼の疲労亀裂発生位置.....	429
図 7-25	コメットの脱出扉まわりの応力集中.....	430
図 7-26	与圧胴体外板の結合部の疲労亀裂発生位置.....	430
図 7-27	ファスナ継手の荷重.....	431
図 7-28	引張を受ける有孔板の応力集中係数の寸法補正係数.....	433
図 7-29	引張を受ける有孔板の応力集中係数の連続孔補正係数.....	434
図 7-30	ファスナ荷重を受ける板の応力集中の寸法補正係数.....	435
図 7-31	ファスナ継手の応力集中係数の計算方法.....	436
図 7-32	皿頭ファスナ孔の引張応力集中の補正係数.....	437
図 7-33	主翼下面外板結合部の寸法.....	439
図 7-34	ストリング結合部のモデル.....	440
図 7-35	ファスナ荷重と部材軸力の計算結果 – 単位荷重負荷.....	441
図 7-36	S-N 曲線の内挿.....	444
図 9-1	座標変換式.....	448
図 9-2	座標軸の単位ベクトル.....	449
図 9-3	主翼座標系.....	450

表のリスト

表 3-1	1次元の構造要素.....	7
表 3-2	2次元の構造要素.....	8
表 3-3	3次元の構造要素.....	9
表 3-4	ファスナ継手の種類.....	10
表 3-5	ばねの問題の解 – MS-Excel の「ソルバー」によるポテンシャル・エネルギーの最小化.....	39
表 4-1	MS-Excel の「ソルバー」を使った釣り合い式の解法.....	52
表 4-2	最小ポテンシャル・エネルギーの原理による静定トラスの解法.....	53
表 4-3	MS-Excel の「ソルバー」を用いたコンプリメンタリ・エネルギーの最小化.....	56
表 4-4	最小ポテンシャル・エネルギーの原理による不静定トラスの解法.....	57
表 4-5	3次元静定トラスの例題の解 – 最小ポテンシャル・エネルギー原理の適用.....	59
表 4-6	最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理による解.....	65
表 4-7	最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理による解.....	66
表 4-8	門型フレームの解析.....	70
表 4-9	胴体フレームの解析.....	75
表 4-10	2本桁構造の断面特性の計算.....	100
表 4-11	非対称2本桁構造の断面特性の計算と主軸の計算.....	104
表 4-12	せん断流の計算.....	105
表 4-13	断面特性の計算 – 胴体.....	108
表 4-14	外板のせん断流が作るねじりモーメント T_0 とせん断流の計算.....	109
表 4-15	コンプリメンタリ・エネルギー最小の原理による解法 – 壁構造 (その2).....	118
表 4-16	「ソルバー」を使った釣り合い式の解法 – 壁構造 (その3).....	121
表 4-17	切り欠きのあるせん断梁の解法 – 全コンプリメンタリ・エネルギー最小の原理.....	127
表 4-18	切り欠きのある対称2本桁構造の解法.....	135
表 4-19	切り欠きのある2本桁構造の曲げねじりの解法.....	141
表 4-20	フレーム (ストリング) が受け持つ与圧荷重の計算例 – 円筒殻理論.....	156
表 4-21	胴体ストリングが受け持つ与圧荷重の計算例.....	159
表 4-22	圧力を受ける平板 (微小変形) – 周辺単純支持.....	163
表 4-23	圧力を受ける平板 (微小変形) – 周辺固定支持.....	163
表 4-24	多列ファスナ継手の解析例 – 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理.....	178
表 4-25	多列ファスナ継手の解析例 – 最小ポテンシャル・エネルギーの原理.....	180
表 4-26	ファスナグループ解析結果.....	184
表 4-27	非線形挙動の分類と考慮の方法.....	186
表 5-1	最大変位の比較.....	198
表 6-1	アルミ合金の符号.....	211
表 6-2	アルミ合金 2024 板材のデータシート.....	214
表 6-3	軸力部材の圧縮破壊の分類.....	217
表 6-4	一定断面の柱の座屈荷重.....	220
表 6-5	長柱座屈の数値計算例 – 変位関数に三角関数を使った解析.....	224
表 6-6	長柱座屈の数値計算例 – 梁要素を使った解析.....	226
表 6-7	薄肉開断面の断面定数.....	231
表 6-8	アルミ板材のクラッド層の厚さ.....	244
表 6-9	クリッピング応力の最大値.....	246
表 6-10	組み合わせ荷重下の矩形平板の座屈応力計算式.....	294

表 6-11	組み合わせ荷重下の曲面板の座屈応力計算式	306
表 6-12	平板の圧縮座屈係数の近似式	308
表 6-13	平板のせん断座屈係数の近似式	309
表 6-14	Shear Resistant 梁と完全張力場梁の内部荷重の比較	315
表 6-15	張力場梁の計算のまとめ	330
表 6-16	作用荷重を変化させて計算した作用応力と許容応力	331
表 6-17	アルミリベットの材料	355
表 6-18	リベットの1面せん断強度	363
表 6-19	出っ張り頭リベットのせん断強度補正係数	364
表 6-20	皿頭リベットせん断継手の許容荷重	365
表 6-21	皿頭リベットせん断継手の許容荷重	366
表 6-22	ファスナの1面せん断強度	367
表 6-23	ファスナの引張強度	368
表 6-24	せん断皿頭ハイロックのせん断継手強度	370
表 6-25	出っ張りせん断頭ハイロックのせん断継手強度	371
表 7-1	節点と棒要素のデータ	440
表 7-2	ばね要素の剛性	441
表 7-3	ファスナ孔の応力と応力集中の計算	442
表 7-4	荷重頻度	443
表 7-5	累積損傷の計算 - ファスナ孔番号 4	443
表 8-1	強度計算書の構成	446

1 はじめに

航空機の性能はその重量に密接に関係している。機体構造重量を減らすことが航空機の性能を向上させるのに大きく寄与するので、構造重量削減に大きな努力が払われる。安全性を確保しながら構造重量を極限まで削減するのが構造技術者の仕事である。そのためには、①適切な構造様式を選ぶこと、②適切に構造部材を配置すること、③適切な材料を選ぶこと、④構造の強度を正確に見積もることが重要である。

航空機構造の特徴はセミモノコック構造 (Semi-monocoque Structure) と呼ばれる骨組みに板を張った構造が主体である。この構造様式を解析するには材料力学の知識だけでは不十分で、薄板構造力学の知識が必要である。その他にも航空機特有の構造様式と解析方法があり、航空機構造解析技術者は航空機構造の強度解析技術を体系的に学ぶことが必須である。しかし、大学の機械系学科の講義では材料力学までしか学ばないので、航空機構造解析技術者になるにはさらに勉強が必要であるが、実務にすぐ役立つ日本語の教科書は少ない。

航空機開発は国際的になっており、航空機構造解析者は英語の強度計算マニュアルを使わなければならないし、強度計算書を英語で書かなければならない機会が多くなってきている。航空機構造解析の教科書や文献は英語のものがほとんどであり、英語の専門用語を知っていないと歯が立たない。

このような背景を考慮して、本書は、材料力学までしか学んでいない技術者を対象として航空機構造解析の基本を解説することを目的としている。

- 航空機構造解析技術者として必須の構造力学の知識を習得する。
- 構造力学の基本概念を知ることにより応用がきくようにする。

航空機製造会社にはそれぞれ独自の強度計算マニュアルが整備されており、強度計算方法が標準化されているが、強度計算マニュアルを無理解のまま使うのではなく、理論的背景を理解して使うことができるようにしたい。

- 航空機構造の専門用語 (英語) の知識を習得する。

本書で扱う内容は以下のとおりである。本書を理解すれば、航空機構造解析技術者として実務をこなせるレベルに達するものと確信している。

- 材料力学、薄板構造力学、変分原理、静強度解析、疲労解析、強度計算書の構成、有限要素法の使い方の基礎

1.1 必要な基礎知識

本書は、読者が以下の基礎的な知識を持っていると想定している。

- 数学の知識
 - 三角関数
 - 微積分の基礎
 - 行列の演算
- 静力学の知識
 - 剛体の釣り合い
- 材料力学の知識
 - 応力、歪
 - トラス
 - 梁

2 構造解析の手順

構造力学の解説に入る前に、航空機構造解析の流れを説明しておく（図 2-1 参照）。この流れを理解して、きちんとステップを踏んで強度解析を進めることがだいじである。

(1) 設計要求 (Design Requirements/Criteria)

設計要求とは、法律で決められている安全要求、その開発プログラムで独自に決めた安全要求、性能要求である。たとえば、「終極荷重 (Ultimate Load) で3秒間耐荷しなければならぬ」、「使用環境温度 170°F」、「制限荷重 (Limit Load) で座屈を許さない」、「飛行回数 200,000 回」等である。構造解析者は、解析を始める前に、どのような設計要求があるかを把握しておかなければならない。

(2) 構造案 (Structural Concept)

構造解析をするときには、構造案が存在していることが前提である。使用する材料も決まっていなければならない。いろいろな構造案を案出してそのなかから最適な構造案を選定することをトレードスタディ (Trade Study) という。

(3) 外部荷重 (External Load)

構造に働く外部荷重は外部荷重解析グループ (External Load Group) から与えられる。インターフェース荷重 (Interface Load) として与えられる場合もある。外部荷重は分布荷重であったり、集中荷重であったりする。

(4) 内部荷重*¹ (Internal Load) の算出

構造解析者が上記の条件をもとにして、対象構造を単純化したモデルを作って構造部材に働く荷重 (内部荷重 Internal Load と呼ぶ) を計算する。内部荷重計算の方法には、トラス理論 (Truss Theory)、梁理論 (Beam Theory)、せん断場理論 (Shear Flow Analysis)、有限要素法 (Finite Element Analysis または Finite Element Method, 略語 FEA または FEM) 等がある。このステップが構造力学の出番である。

小さい構造物なら、全体を詳細な FEM モデルで解析して一気に詳細な応力分布まで得られるので、内部荷重という考え方を必要がない。しかし、航空機構造は大きく複雑で、多数の構造要素の組み合わせでできているので、有限要素法の使い方が他の構造物の解析方法と異なるところがある。有限要素法はもともと応力を求める手段としてではなく、航空機構造の変形と内部荷重を計算する手段として開発された。航空機構造解析では、全機レベルの有限要素モデルで内部荷重を求めたあと、ズームングの手法を用いて有限要素法を何段階にも使う。有限要素法で細部の応力まで求めることもあるが、有限要素法を使うのは構造部材の内部荷重を求めるところまでということも多い。

(5) 強度計算 (Strength Check, Stress Analysis)

個々の構造部材に働く内部荷重が決まったら、その部材が破壊するかどうかを判定する。そのためには、部材がどのような破壊をするか (破壊様式, 破壊モード Failure Mode) を想定する必要がある。ひとつの破壊モードを想定するだけでは危険で、複数の破壊モードを想定しなければならない。強度計算マニュアルに強度判定の方法が載っているので、それにしたがって強度判定をおこなう。航空機構造の破壊モードの特徴は、座屈現象がからむ破壊が多いことである。

検討しなければならない強度には、静強度 (Static Strength) と疲労強度 (Fatigue Strength) と損傷許容性 (Damage Tolerance) がある。構造によっては、剛性要求 (Stiffness Requirement) が付加されることがある。剛性要求は、変位の要求で規定される場合と、固有振動数の要求で規定される場合がある。

強度判定をした結果、強度に過大な余裕があったり、強度が不足していることがわかった場合には、適切な部材寸法に変えたり、構造配置を変更したりする。これをサイジング (Sizing) と言う。

(6) 強度計算書 (Stress Analysis Report) の作成

構造解析者のアウトプットは強度計算書（Stress Analysis Report, Stress Memo）である。民間機の場合には、強度計算書は Certification Report（耐空性を証明するための公式文書）のひとつとして航空局に提出される。

構造解析者の仕事は、①内部荷重を算出すること、②強度を判定すること、の2つであると言える。本書は、内部荷重の計算方法と破壊モードの解説に重点をおく。

*注1：内部荷重の説明は3.4項を参照のこと。

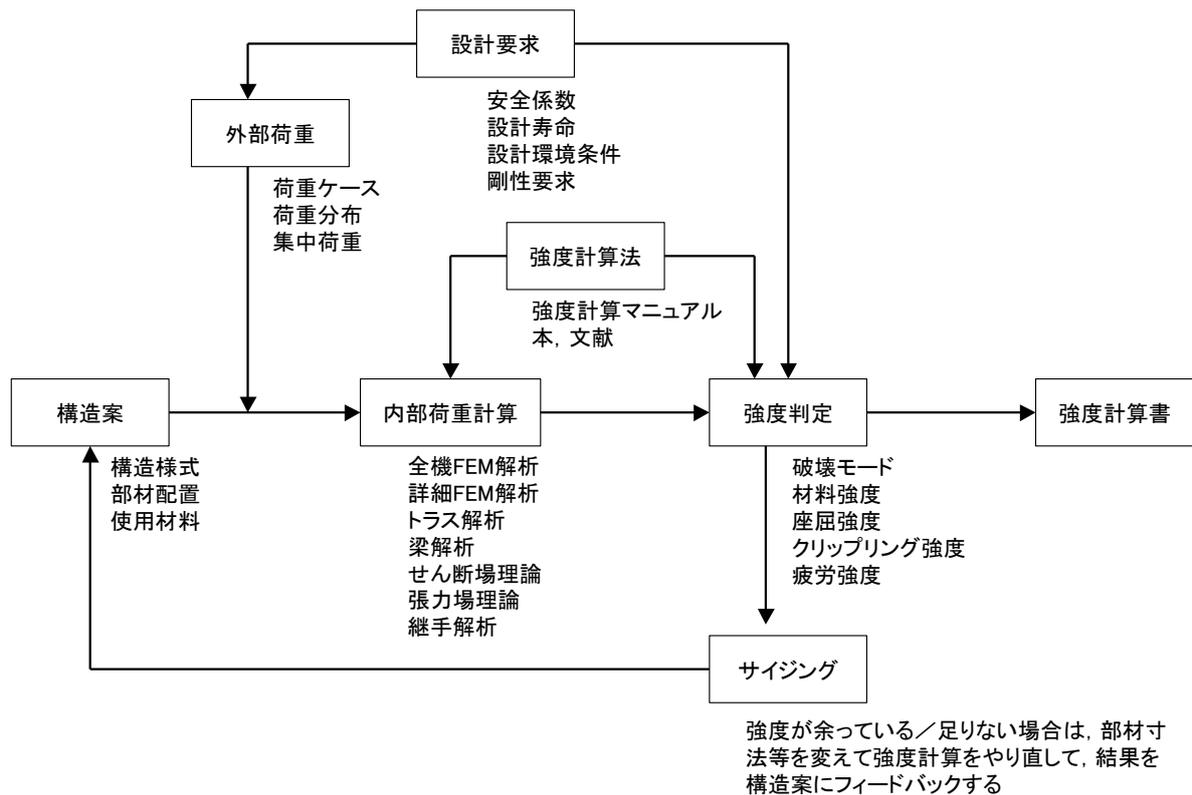


図 2-1 航空機構造解析の流れ

3 航空機構造解析の基礎知識

航空機構造では、骨組みに板を張った構造（セミモノコック構造、図 3-1、図 3-2）を多用する。このため、航空機構造に特有の構造力学が発展してきた。もうひとつ航空機構造に特有なことは、部材の結合に溶接をほとんど使わず、ボルト結合、リベット結合を使うことである。これは、航空機の構造材料として、溶接ができないアルミ合金を使用することに起因している。

本章では、航空機構造解析の基礎知識として、構造要素、境界条件、内部荷重、フリーボディ・ダイヤグラム、応力と歪、エネルギー原理について説明する。

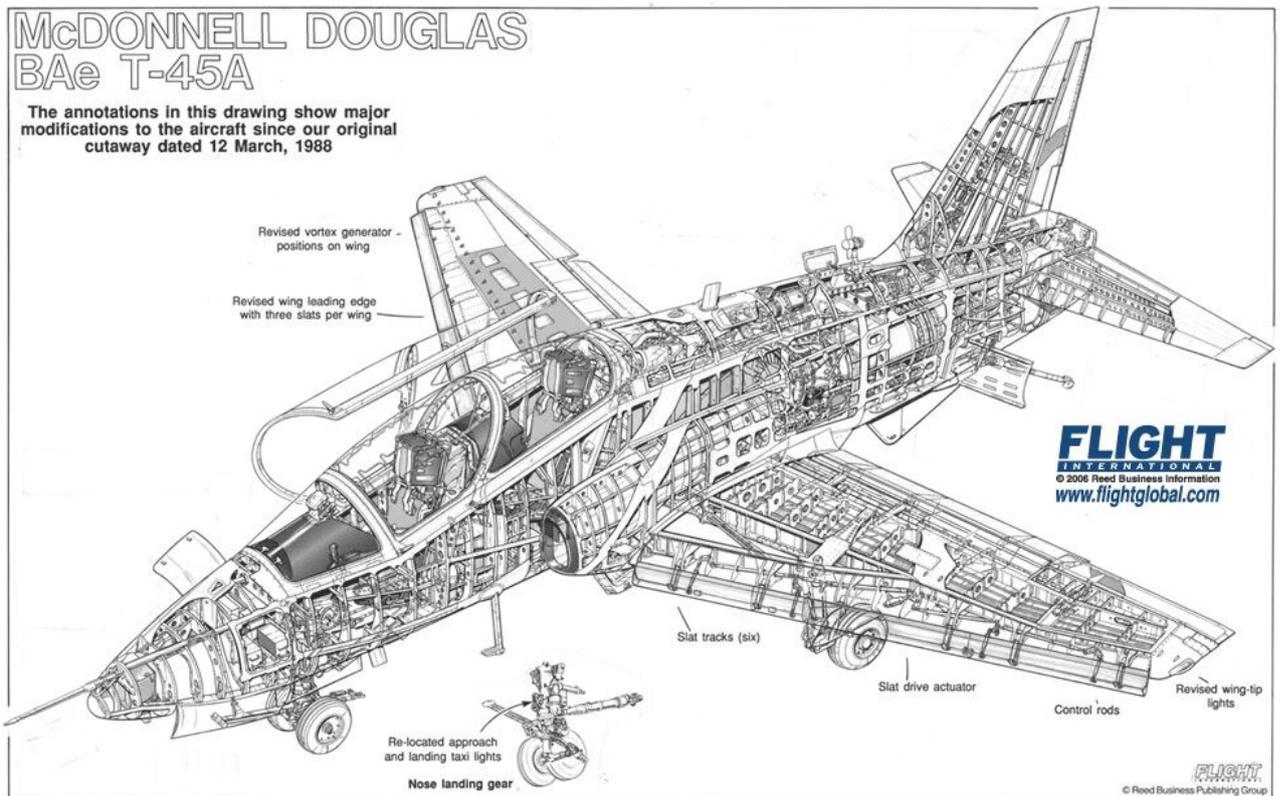


図 3-1 T-45A の構造概要

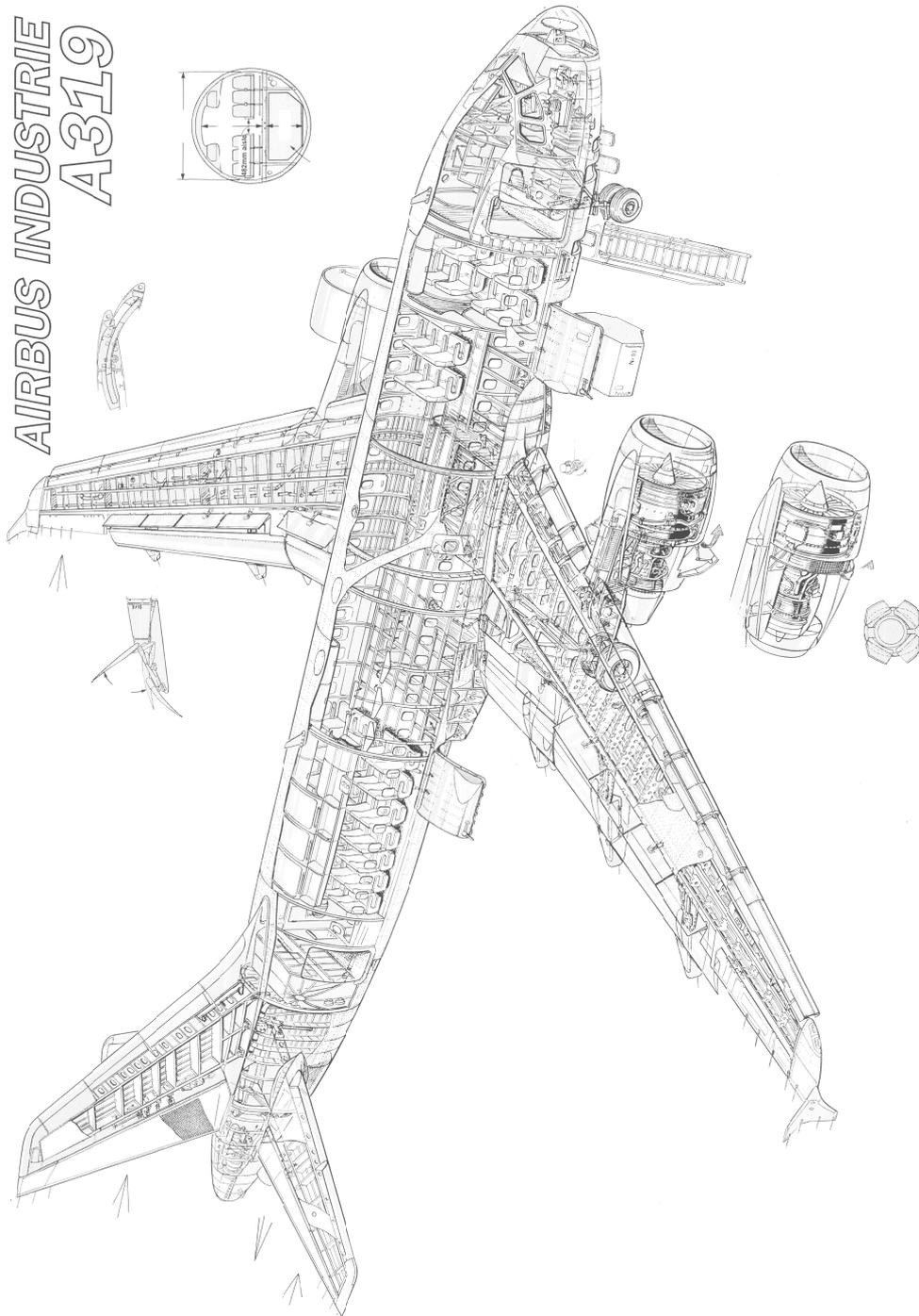


図 3-2 A319 の構造概要

3.1 どう単純化するか

前章で、内部荷重を算出するのが構造解析の仕事のひとつであると述べた。実際の航空機は多数の部品で構成された複雑な構造物であるので、個々の部品に働く荷重を算出するのは簡単ではない。どの部品がどういう機能を持っているのかを把握したうえで、単純化することが必要である。有限要素法と計算機能力の向上のおかげで、大規模な構造を解析できるようになったが、それでも個々の部品をそのままモデル化した解析は困難である。どうしても単純化が必要である。構造解析技術者には複雑な構造を単純化する能力が要求される。単純化とは、実際の構造から余分なものを取り去り、主要な部材の機能を把握して、基本的な構造要素でモデル化することである。

航空機構造は大規模な構造なので、まず全体をマクロ的にモデル化して解析して内部荷重を求め、次にその一部分をさらにズームアップしてもう一度モデル化して解析するというように、多段階のステップで解析を進める。

「軽構造の理論とその応用」(文献[2-1])の次の文章は、単純化の考え方を見事に説明している。

構造がいかに複雑に見えていても、分解してみると構成基本部材の極形は、単純な棒、板、殻であることに気がつく。これに精通することは、それらを単体として使う構造のみでなく、それらの組合せになるより複雑な構成の構造にも通ずることであり、とくに後者は、その基礎なくしては合理的な設計ができないのである。

おもしろいことに、外観が非常に複雑な構造でも、その働き方は案外単純なことである。たとえば、客船を棧橋からながめてみると、ブリッジ、客室、デッキ、デリック、アンカー、タラップ、諸所の出入口、切欠き、窓孔等々が見え、内部に立入ると階段、客室、隔壁、機関室、プロペラ軸、パイピング等々と、その構造の複雑さに目を奪われよう。そこには棒、板、殻のあらゆる要素の総合が見られる。このような複雑な船体の強度計算を行おうとして、これをいったいどのようにして扱ったらよいかためらいを感ずるのは、無理からぬことである。艤装や内装に目を奪われるからである。船体の全体としての本質的な構造作用をつかむためには、それらの2次部材を全部取り除き、強度に有効な1次部材(primary structure)を抽象することである。それには、船体から遠ざかってながめるのがよい。事実、船が港を離れるにしたがって2次部材はしだいに見えなくなり、本質的な1次構造が残り、ついには海上に浮かぶ1個の巨大なビームと化してしまう。それが本然の姿というものである。もちろん、それは単純な一様断面のビームではなく、全長にわたって断面形の変わっている変断面ビームである。その弾性計算に、ビームの曲げ理論を適用してみると、応力や撓みが実験とよく一致する事実は興味あることである。それは、構造の本質を見抜いているからである。航空機構造についても同じことがいえるのであって、飛行場では大型輸送機の美しい流線型やジェット音に耳目を奪われるが、ひとたび大空に飛び立つと、主翼と胴体と尾翼とは空中に浮かぶ巨大な3個のビームの結合体と見えてくるであろう。ビームの理論や振り理論によって、その基本的な応力計算が行われているのもゆえなしとしない。高層建築や高層タワーの持つ固有振動数の算定は、耐震性を調べるのに重要であるが、これまた内部構造の複雑さにもかかわらず、全体としての曲げ振動や縦振動の特性は比較的簡単なのであって、これらも変断面ビームがあって、それに各層ごとの質量がその間隔で集中して結合しているビーム系に抽象できよう。そのように抽象化して求めた振動数は、実験ともよく一致するのである。基本部材としての小さいビームやカラムやプレートなどから、それらを多数組み合わせで作られたこれらの構造体が、総体的にはまた巨大ビームとしての特性を持つことを発見することは、まことに興味深いことであろう。ビームに出發してビームに帰するという哲学的なものを感じずるほどに、自然法則の単純さに打たれるのである。

(「軽構造の理論とその応用(上)」序章 p.4 より)

3.2 構造要素

実際の構造部品は複雑な形をしているが、機能に着目して分類すると、基本的な構造要素に分類できる。構造のモデル化をするには、基本的な構造要素を知っておく必要がある。基本的な構造要素は、棒(Rod)、梁(Beam)、柱(Column)、板(Plate)、膜(Membrane)、殻(Shell)、継手(Joint)である。実構造を単純化してこれらの構造要素を組み合わせで表現したものが構造モデルである。注意しなければいけないのは、形が同じ構造部材でも機能によって構造要素の分類が異なる場合があることである。どういう荷重を受け持つかで構造要素の種類が決まる。

3.2.1 1次元部材

1次元の構造要素を表 3-1 に示す。

(1) 棒 (Rod)

引張または圧縮だけの軸力だけを受け持つ、細長いまっすぐな部材である。いろいろな断面形状がある。ねじり荷重を受け持つ場合もある。NASTRAN (汎用有限要素法プログラム) では ROD 要素でモデル化する。

(2) 梁 (Beam)

横荷重を受け持つ、細長い部材である。まっすぐな梁と曲がった梁がある。いろいろな断面形状がある。NASTRAN では BAR 要素または BEAM 要素でモデル化する。

(3) 柱 (Column, Beam Column)

横荷重と軸力を受け持つ、細長いまっすぐな部材である。いろいろな断面形状がある。NASTRAN では BAR 要素または BEAM 要素でモデル化する。

表 3-1 1次元の構造要素

分類	構造要素	説明	図	内部荷重
1次元部材	棒 (Rod)	直線部材。 軸力だけを受け持つ。 両端がピン結合。		軸力
	梁 (Beam)	直線または曲がった部材。 曲げモーメントとせん断力とねじりを受け持つ。		曲げモーメント、せん断力、ねじりモーメント
	ビームカラム (Beam Column)	直線部材。 軸力と曲げモーメントとせん断力を受け持つ。		軸力、曲げモーメント、せん断力、ねじりモーメント

3.2.2 2次元部材

平板の要素である。どういう荷重を受け持つかによって、さらに分類される。実際には、平板は面内力（軸力、せん断力）、面外力（曲げモーメント、ねじりモーメント、面外せん断力）を受け持つことができるが、いろいろな要素が組み合わされた構造物となった場合、いくつかの荷重は無視できるくらい小さくなることが多いので、せん断パネルや面内板のように単純化した構造要素とみなすことができる。

(1) せん断パネル (Shear Panel)

せん断荷重だけを受け持つ平面要素である。NASTRAN では SHEAR 要素でモデル化する。

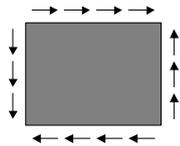
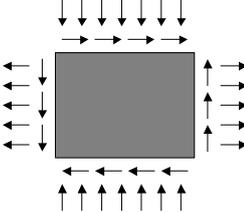
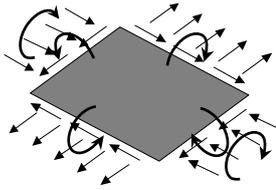
(2) 面内板 (Plate without Bending Stiffness)

面内荷重だけを受け持つ平面要素である。NASTRAN では TRIA3 要素または QUAD4 要素に面外剛性を入れないでモデル化する。

(3) 曲げ板 (Plate with Bending Stiffness)

面内荷重と面外荷重を受け持つ平面要素である。NASTRAN では TRIA3 要素または QUAD4 要素に面外剛性を入れてモデル化する。

表 3-2 2次元の構造要素

分類	構造要素	説明	図	内部荷重
2次元(平面)部材	せん断パネル (Shear Panel)	面内のせん断力だけを受け持つ。		単位幅あたりのせん断荷重=せん断流 (Shear Flow)
	面内板 (Plate without Bending Stiffness)	面内の力(軸力、せん断力)だけを受け持つ。		単位幅あたりの軸力、せん断荷重 (Stress Resultant)
	曲げ板 (Plate with Bending Stiffness)	面内の力、曲げモーメント、ねじりモーメント、面外せん断力を受け持つ。		単位幅あたりの軸力、せん断荷重、曲げモーメント、ねじりモーメント、面外せん断荷重 (Stress Resultant)

3.2.3 3次元部材

曲面形状の板要素である。アーチや圧力容器の例で示されるように、面外荷重 (Out-of-plane Load) を面内力で支持できるのが特徴である (表 3-3)。

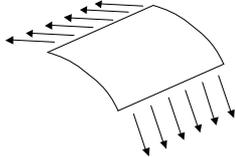
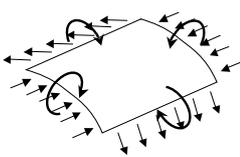
(1) 膜 (Membrane)

面外の曲げ剛性がないので、引張り荷重だけを受け持つことができる曲面要素である。圧縮荷重が入ると不安定になる。

(2) 殻 (Shell)

すべての荷重を受け持つ曲面要素である。NASTRAN では SHELL 要素または、細かく分割した QUAD4, TRIA3 要素でモデル化する。

表 3-3 3次元の構造要素

分類	構造要素	説明	図	内部荷重
3次元(曲面)部材	膜 (Membrane)	引張力だけを受け持つ。 圧縮には不安定。		単位幅あたりの軸力 (Stress Resultant)
	殻 (Shell)	面内の力、曲げモーメント、ねじりモーメント、面外せん断力を受け持つ。		単位幅あたりの軸力、せん断荷重、曲げモーメント、ねじりモーメント、面外せん断荷重 (Stress Resultant)

3.2.4 継手

実際の航空機構造はたくさんの構造要素が組み合わさってできているので、構造要素を結合することが必要になる。航空機構造にはいろいろな形状の継手が使われる。

(1) ファスナ継手 (Fastener Joint)

ファスナ継手はボルトやリベットで構造部材をつなぐ結合方式である (表 3-4)。ボルトやリベットのことをファスナと総称している。さらに、ファスナ継手の種類には、せん断継手 (Shear Joint) と引張継手 (Tension Joint) の2種類がある。どちらの継手にも永久結合と取り外し可能な結合がある。

表 3-4 ファスナ継手の種類

分類	構造要素	説明	図	内部荷重
継手 (Joint)	多列リベット(ボルト)せん断継手 (Rivet Joint, Bolt Joint)	荷重を多数のリベットまたはボルトのせん断荷重で伝達する継手である。基本的に永久結合の継手である。		個々のリベット・ボルト荷重
	せん断ラグ継手 (Lug Joint)	せん断ボルトとせん断ラグで荷重を伝達する継手である。基本的に取り外し可能な継手である。		ラグ荷重, ボルト荷重
	引張ボルト継手 (Tension Bolt Joint)	荷重をボルトの引張荷重で伝達する継手である。取り外し可能な継手であることが多い。		ボルト荷重

(2) 接着継手

構造の結合の場合には、接着継手は薄い板どうしのせん断荷重の伝達に使われることが多い。特に、複合材構造では接着継手が多用されている。接着継手は引きはがす荷重 (Peel) に弱いことに注意しなければならない。

3.3 境界条件

構造のモデル化ができれば、次にその構造モデルがどう支持されており、外部からどういう荷重（外部荷重 External Load）が働くかを与える。これらの条件を境界条件（Boundary Condition）という。

3.3.1 支持条件

支持条件（Support Condition または Constraint）を理解するには、自由度（Degree of Freedom）の概念を知っている必要がある。構造要素の境界（端）がどういう方向に拘束されているかを表すのが自由度である。座標系 $Oxyz$ があり、部材 AB があるとする（図 3-3）。部材の変形と移動により、点 A は x 方向、 y 方向、 z 方向の並進移動と、 x 軸まわり、 y 軸まわり、 z 軸まわりの回転移動をする。移動の方向の成分は 6 個あり、これを自由度という。自由度には番号がついており、1 から 6 までの番号で呼ぶ。変形前の位置と変形後の位置の差を変位（Displacement）と呼び u, v, w で表す。

これらの自由度のうち、どれを拘束するかで支持条件を表す。

支持条件の種類には、単純支持（Simply Supported）と固定支持（Clamped または Fixed）がある。

- 単純支持：並進の自由度を止め、回転の自由度を止めない。
- 固定支持：並進の自由度と回転の自由度を止める。

単純支持の場合、反力のモーメントは発生せず、止めた方向の力だけが発生する。固定支持の場合、反力としてモーメントが発生する。図 3-4 の例では、点 A の並進自由度を止めて、回転の自由度を止めていないので、点 A は単純支持である。自由度 1, 2, 3 を止めて、4, 5, 6 を自由にしている。梁の支持の例を図 3-5 に示す。

支持条件が変わると、構造内部の荷重分布が変わってしまうので、支持条件はとても重要である。実際の構造の支持条件はそれほど単純ではないが、構造解析をするにはどうしても支持条件の単純化（近似）が必要である。解析に用いる支持条件を決めるには、実際の構造をよく理解することが大事である。

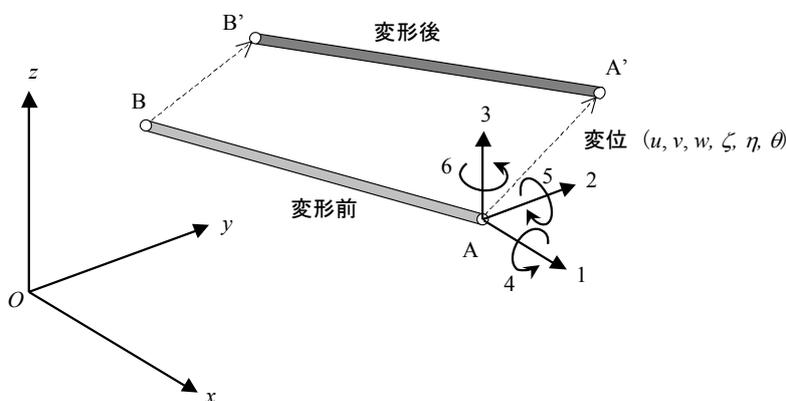


図 3-3 自由度

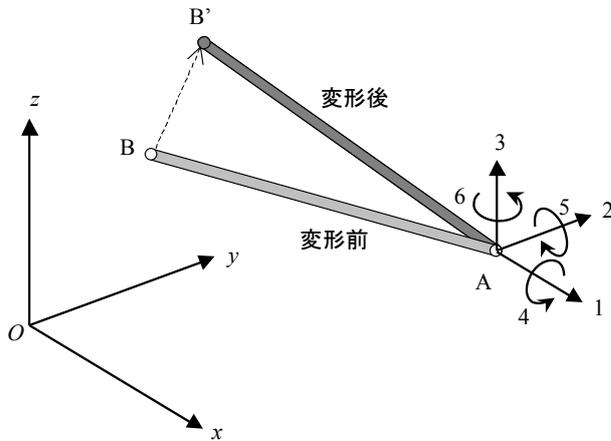


図 3-4 単純支持

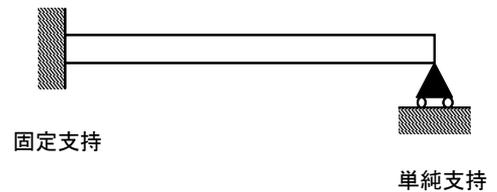


図 3-5 梁の支持の例 – 固定支持と単純支持

3.3.2 外部荷重

構造に働く外部荷重は集中的に負荷される場合（集中荷重）と分散された形で負荷される場合（分布荷重）がある（図 3-6）。それぞれの例を以下に示す。構造解析にあたっては、外部荷重についても単純化（近似）が必要である。たとえば、分布荷重を等価な集中荷重で近似したり、複雑な分布荷重を単純な分布荷重に置き換えたりすることがおこなわれる。

- 集中荷重
 - 主脚取付部荷重
 - 舵面のヒンジ荷重
- 分布荷重
 - 主翼にはたらく空気力
 - 胴体の与圧
 - 主翼にはたらく燃料の慣性力

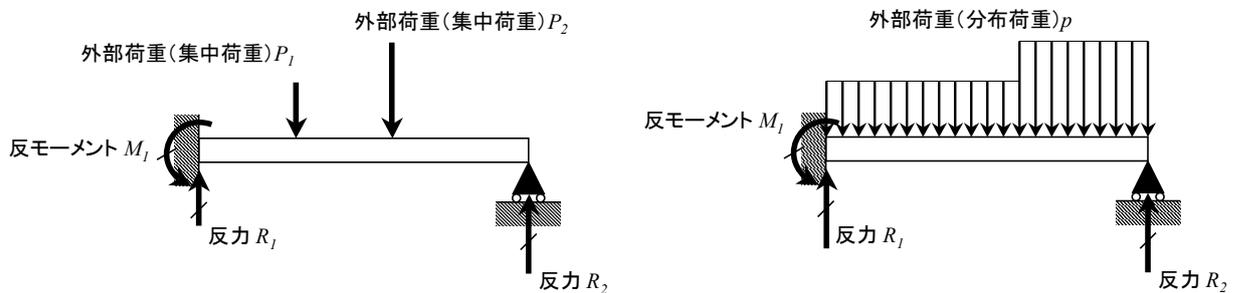


図 3-6 外部荷重 – 集中荷重と分布荷重

3.3.3 強制変位

境界条件が強制変位 (Forced Displacement) の形で与えられることがある。たとえば、エルロン等の舵面のヒンジ点 (Hinge Point) は翼の変形によって強制的に動かされる。この場合、境界条件としてヒンジ点の変位の方向と大きさが与えられる。

3.4 内部荷重

航空機構造の解析では、いきなり構造部材に働く応力を求めることはしない。(これが航空機構造解析の特徴と言える。応力は強度判定の段階で出てくる。) まず内部荷重 (Internal Load) を求める。内部荷重は局所的な応力ではなく、結合荷重、反力、軸力や単位幅あたりの力のような、構造要素のマクロな力の分布である。表 3-1, 表 3-2, 表 3-3 に各構造要素の内部荷重を示す。

航空機構造解析で内部荷重を使う理由は3つある。

- (1) 航空機の構造は大規模で複雑なため、有限要素法を使っても個々の部材の応力分布を求めることができるほど精密なモデル化ができない。まず構造要素の内部荷重を求め、次の段階でその内部荷重を使って構造要素の応力を求めるというように2段階の解析を行う。
- (2) 航空機の構造要素の破壊モードは座屈現象が関係する破壊モードが多く、座屈荷重以上まで使う。座屈後に荷重分担が変わってしまうので、有効な断面積に基づいた応力を内部荷重から計算しなおす必要がある。
- (3) 構造設計の進展にともなって部材の寸法が変化するので、力の分布を応力で表現すると、寸法の変更に応じて応力が変わってしまう。内部荷重で表現すると、部材寸法が変わっても内部荷重はほとんど変化しないので、サイジング (Sizing, 部材寸法の決定) の作業に好都合である。

力の釣り合いだけで内部荷重分布を算出できる構造のことを静定 (Statically Determinate) 構造と呼ぶ。一方、力の釣り合いだけでは内部荷重が決まらず、構造要素の剛性を考慮しないと内部荷重が決まらない構造のことを不静定 (Statically Indeterminate) 構造と呼ぶ。

内部荷重を求める方法にはいろいろな方法があるが、5項で説明する有限要素法がもっとも適用範囲の広い、有用な手段である。簡単な構造であれば、梁理論、せん断場理論、エネルギー法、等を使って内部荷重を算出できる。

3.5 力の釣り合いとフリーボディ・ダイアグラム

構造解析の基本は静力学である。したがって、構造要素の力の釣り合い (Equilibrium) を理解することが構造解析の出発点になる。構造要素の荷重の釣り合いを示した図をフリーボディ・ダイアグラム (Free Body Diagram) と呼ぶ。フリーボディ・ダイアグラムを描くことにより、構造の理解が容易になる。フリーボディ・ダイアグラムには、外力 (External Load) と反力 (Reaction) を示し、個々の構造要素に働く荷重が釣り合っていることを表示している。

航空機構造解析におけるフリーボディ・ダイアグラムの重要性はいくら強調しても強調しすぎることはない。強度計算のチェックに有用である。フリーボディ・ダイアグラムが正しく描かれていることが、強度計算書の最低条件であると言える。著者はフリーボディ・ダイアグラムをチェックして強度計算書の間違いをいくつも見つけた経験がある。有限要素法で解いた結果を解釈する場合にも役に立つ。

3.5.1 フリーボディ・ダイアグラムの描き方

フリーボディ・ダイアグラムの描き方の手順は以下のとおりである。

- (1) 対象構造を構造要素に分解する。
- (2) 構造要素の機能を吟味する。構造要素がどういう荷重を受け持つのか？
- (3) 対象構造の支持条件を吟味する。これにより、反力の種類と方向が決まる。
- (4) 対象構造に働く外部荷重の負荷点と負荷方向を知る。
- (5) 構造要素どうしの結合条件を知る。これにより各構造要素の支持条件がわかる。
- (6) 各構造要素の力の釣り合いを図示する。力を矢印で描き、反力には矢印の軸に斜め線を入れる。

簡単なトラスのフリーボディ・ダイアグラムの例を図 3-7 に示す。トラスはすべての構造要素が棒要素で軸力だけを受け持つ。支持点 1 と 2 は単純支持である。支持点 1 には2つの棒要素が結合されているから、この支持点

は上下荷重と水平方向の反力を持つことができる。支持点 2 は横向き棒が結合されているので、水平方向の反力だけをとる。フリーボディ・ダイアグラムを描くには、反力の大きさも棒要素の軸力の大きさが分かってもよい。力の矢印の向きが実際の力の向きと反対であってもかまわない。計算した結果、力の値が負の値になるだけである。トラスのフリーボディ・ダイアグラムには 2 つの描き方がある。上の図では、結合点における力の釣り合いを示している。下の図では、棒要素の力の釣り合いを示している。

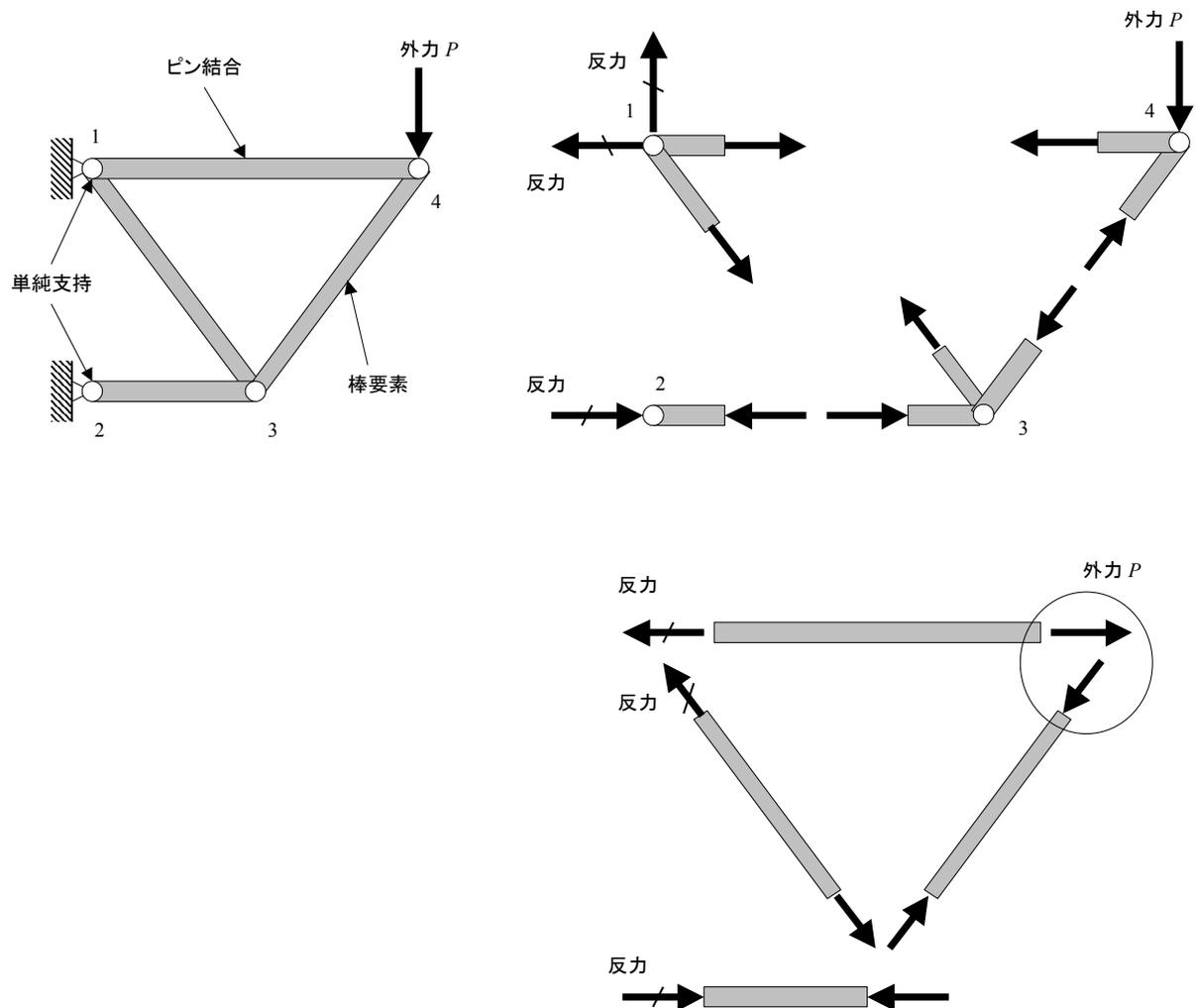


図 3-7 トラスのフリーボディ・ダイアグラム

次に、舵面のヒンジ金具のフリーボディ・ダイアグラムを示す（図 3-8）。ヒンジ金具に負荷される外荷重をボルトのせん断で舵面本体に伝える。横方向の力は外板に伝わり、上下方向の力は桁のウェブに伝わる。

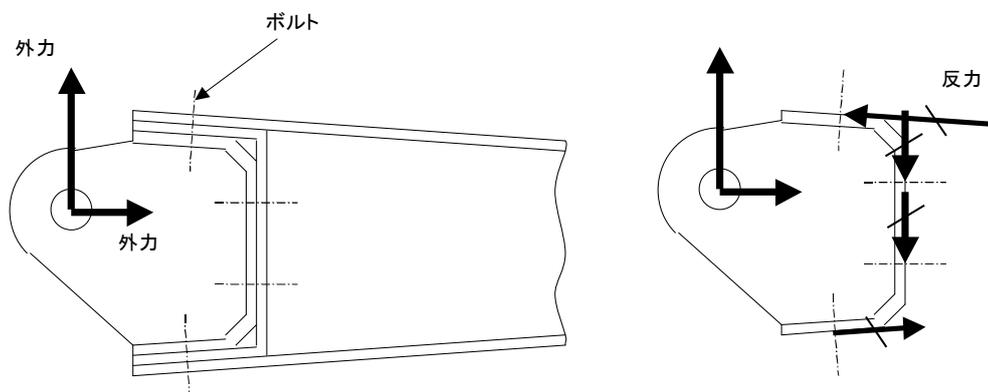


図 3-8 舵面のヒンジ金具のフリーボディ・ダイヤグラム

3.6 応力と歪

応力と歪は材料力学の基礎であるので、復習しておく。後に説明する「エネルギー原理」の項と「強度の判定」の項でこの知識が必要になる。

3.6.1 応力

図 3-9 のように、支持された物体に外力が負荷されている状態を考える。この物体中の点 A にはたらいっている力の状態を表すには、応力 (Stress) を使う。

応力とは、ある点において座標軸に垂直な面に働く単位面積あたりの力である。ある点において、直交する3つの面にそれぞれ3つの応力成分で応力状態が定義される。応力の表現 f_{xy} の最初の添字 x は応力のはたらく面 (x 軸に垂直な面) を示し、2番目の添字 y は力の向きを示す。 f_{xx}, f_{yy} は面に垂直にはたらく直応力 (Normal Stress) を示し、 f_{xy} は面に平行にはたらくせん断応力 (Shear Stress) を示す。(直応力 f_{xx} を f_x と省略して書くことも多い。) 9つの応力成分のうち、せん断応力には対称性があり、独立な成分は6つである。(応力を f と書くのは航空機構造解析に特有で、材料力学や構造力学では σ を使う。)

$$\begin{aligned} f_{xy} &= f_{yx} \\ f_{yz} &= f_{zy} \\ f_{zx} &= f_{xz} \end{aligned}$$

マトリックス表示で書くと、

$$[\mathbf{f}] = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

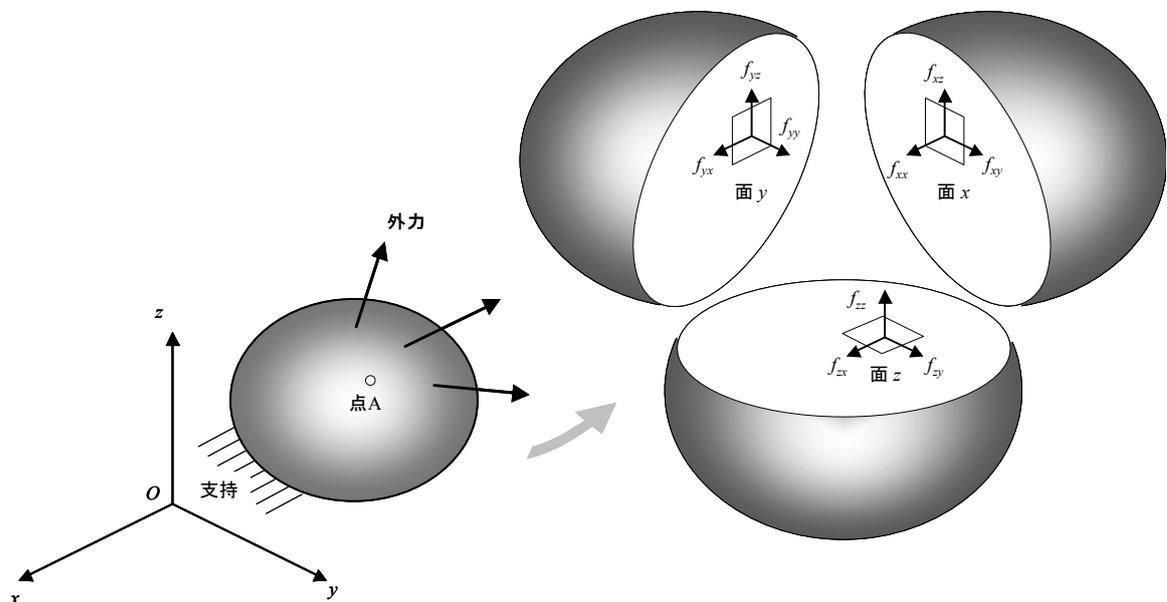


図 3-9 応力の定義

3.6.1.1 1次元応力

棒要素で説明する（図 3-10）。棒要素の場合には、応力は一方向だけに働き、単軸応力（Axial Stress）と呼ぶ。内部荷重（軸荷重）との関係は次のようになる。応力の符号は引張の場合を正とする。

$$f = \frac{P}{A}$$

ここで、

- f : 一軸応力
- P : 軸荷重
- A : 棒の断面積

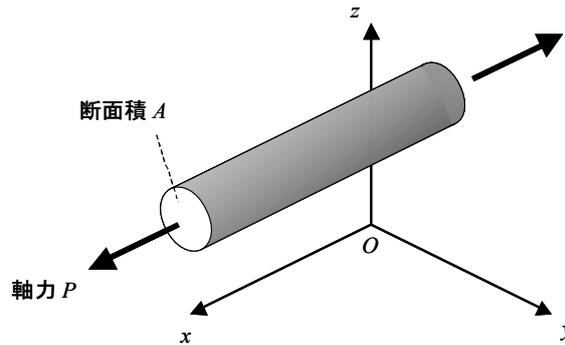


図 3-10 1次元の応力 - 棒要素

3.6.1.2 2次元応力

面内板要素で説明する。面内板要素の場合には、応力は2次元であり、 f_x, f_y, f_{xy} の3つの成分を持つ（図 3-11）。 f_x, f_y を直応力（Normal Stress）、 f_{xy} をせん断応力（Shear Stress）と呼ぶ。面内板要素の内部荷重（単位幅あたりの荷重 Stress Resultant） N_x, N_y, N_{xy} と応力成分との関係を次の式に示す。図 3-11 に示すせん断応力の向きが正である。

$$f_x = \frac{N_x}{t}, \quad f_y = \frac{N_y}{t}, \quad f_{xy} = \frac{N_{xy}}{t}$$

ここで、

- f : 応力
- N : 内部荷重（単位幅あたりの荷重）
- t : 板厚

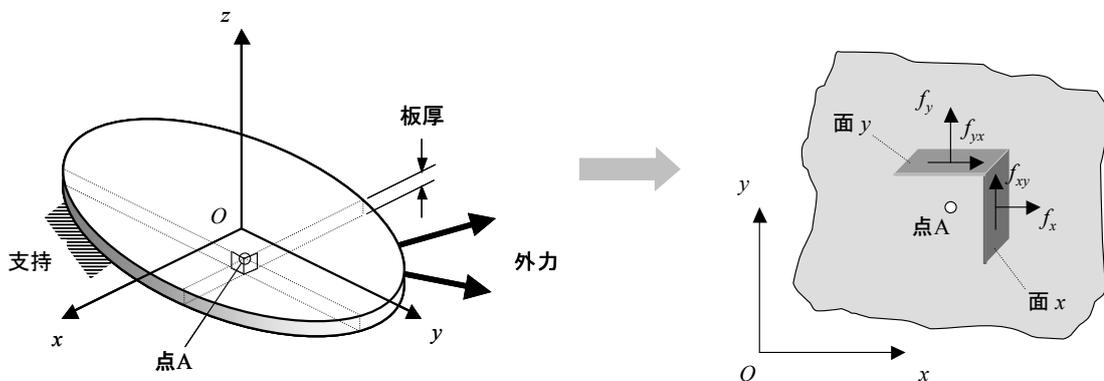


図 3-11 2次元応力 - 面内板要素

3.6.1.3 2次元応力の座標変換

実際の構造計算で2次元応力の座標変換が必要になる(図 3-12)。2次元応力の場合に、座標系 Oxy で表した応力状態を別の座標系 $Ox'y'$ で表示する式を以下に示す。

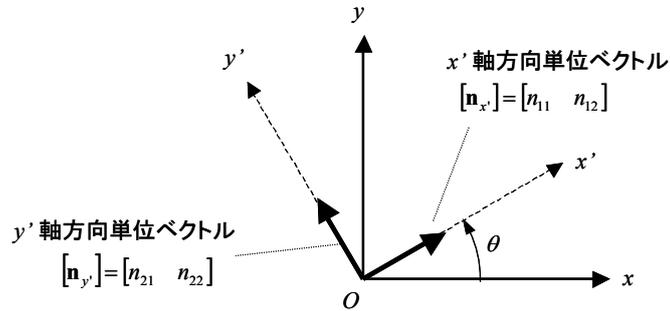


図 3-12 2次元応力の座標変換

座標系 Oxy で表した応力を次のようにマトリックス表示する。

$$[\mathbf{f}] = \begin{bmatrix} f_x & f_{xy} \\ f_{xy} & f_y \end{bmatrix}$$

同じように、座標系 $Ox'y'$ で表した応力は、

$$[\mathbf{f}'] = \begin{bmatrix} f_{x'} & f_{x'y'} \\ f_{x'y'} & f_{y'} \end{bmatrix}$$

両座標系間の関係を方向余弦マトリックスで次のように表示する。

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

ここで n は方向余弦を意味し、 n_{12} の最初の添字 1 は新しい座標系の座標軸 x' を表し、2 番目の添字 2 は元の座標系の座標軸 y を表す。 n_{12} は x' 軸方向の単位ベクトルの y 軸方向の成分を示す。

座標変換式は次のようになる。

$$[\mathbf{f}'] = \begin{bmatrix} f_{x'} & f_{x'y'} \\ f_{x'y'} & f_{y'} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}][\mathbf{f}][\mathbf{T}]^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x & f_{xy} \\ f_{xy} & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

これを別の表現で書き直すと、

$$(\mathbf{f}') = \begin{pmatrix} f_{x'} \\ f_{y'} \\ f_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xy} \end{pmatrix}$$

3.6.1.4 2次元応力の主応力

2次元応力場において、せん断応力 f_{xy} がゼロになり直応力だけになる座標系が必ず存在する。この座標系における直応力を主応力 (Principal Stress) と呼ぶ。この主応力の大きい方 f_1 を最大主応力 (Maximum Principal Stress)、小さい方 f_2 を最小主応力 (Minimum Principal Stress) と呼ぶ。

2次元応力場 (f_x, f_y, f_{xy}) における主応力の向きは次の式を解くことによって得られる。

$$\begin{aligned} f_{x'y'} = 0 &= -(f_x - f_y) \cos \alpha \sin \alpha + f_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ -\frac{(f_x - f_y)}{2} \sin 2\alpha + f_{xy} \cos 2\alpha &= 0 \\ \alpha &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2f_{xy}}{f_x - f_y} \right) \end{aligned}$$

逆正接関数 \tan^{-1} では得られた角度が最大主応力の方向か最小主応力の方向かが決まらない。Excel 等の計算プログラムで計算する場合には、ATAN2 関数を使えば象限も含めて最大主応力の方向が決まる。

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ATAN2} \left(\frac{2f_{xy}}{f_x - f_y} \right)$$

最大主応力、最小主応力の値は次のようになる。

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} \left(f_x + f_y + \sqrt{(f_x - f_y)^2 + 4f_{xy}^2} \right) \\ f_2 &= \frac{1}{2} \left(f_x + f_y - \sqrt{(f_x - f_y)^2 + 4f_{xy}^2} \right) \end{aligned}$$

せん断応力が最大となるのは、主応力の向きから 45 度ずれた方向であり、最大せん断応力の大きさは、

$$f_{xy, \max} = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

である。

実際の強度計算で重要な 2次元応力の座標変換の例を以下に示す。

(1) 1軸応力

1軸応力 $(f_x, 0, 0)$ の場合に座標系を変化させたときの応力の変化を図 3-13 に示す。45度でせん断応力が最大になり、応力は $(0.5f_x, 0.5f_x, -0.5f_x)$ となる。

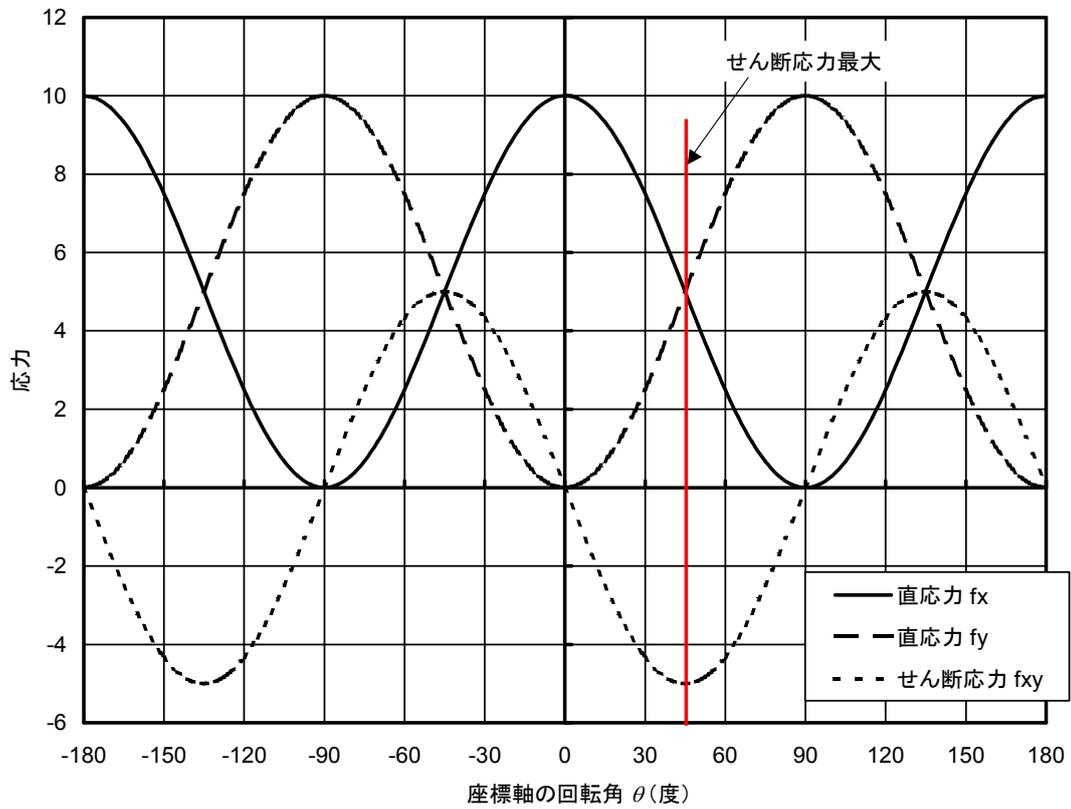


図 3-13 1軸応力の座標変換

(2) 純せん断応力

純せん断応力 $(0, 0, f_{xy})$ の場合に座標系を変化させたときの応力の変化を図 3-14 に示す。45度で直応力が最大になり、応力は $(f_{xy}, f_{xy}, 0)$ となる (図 3-15)。

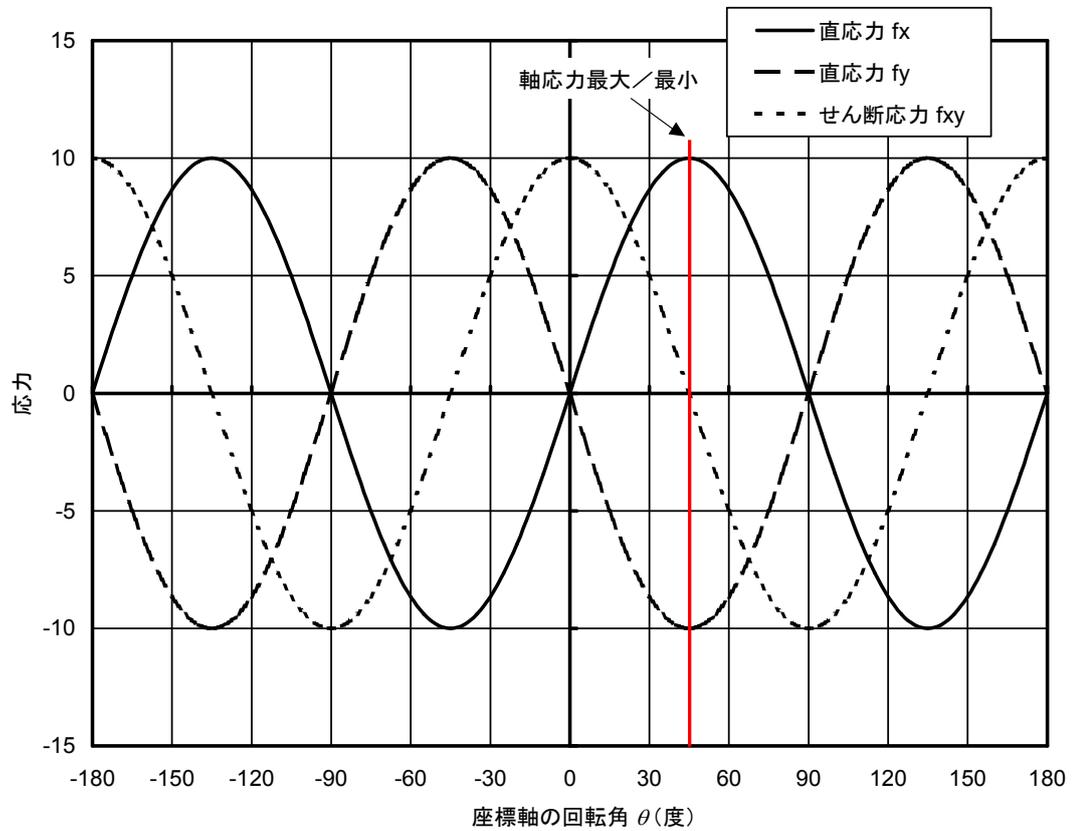


図 3-14 純せん断応力の座標変換

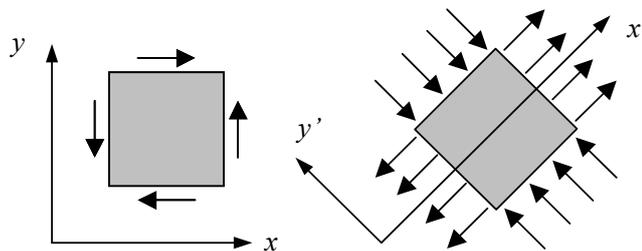


図 3-15 純せん断応力

(3) 2軸応力の2つの成分が等しいとき

2軸応力の2つの成分が等しい場合 $(f_x, f_y (=f_x), 0)$ に座標系を変化させたときの応力の変化を図 3-16 に示す。応力状態は座標系の回転によらず一定であり、どの向きにもせん断応力は発生しない (図 3-17)。

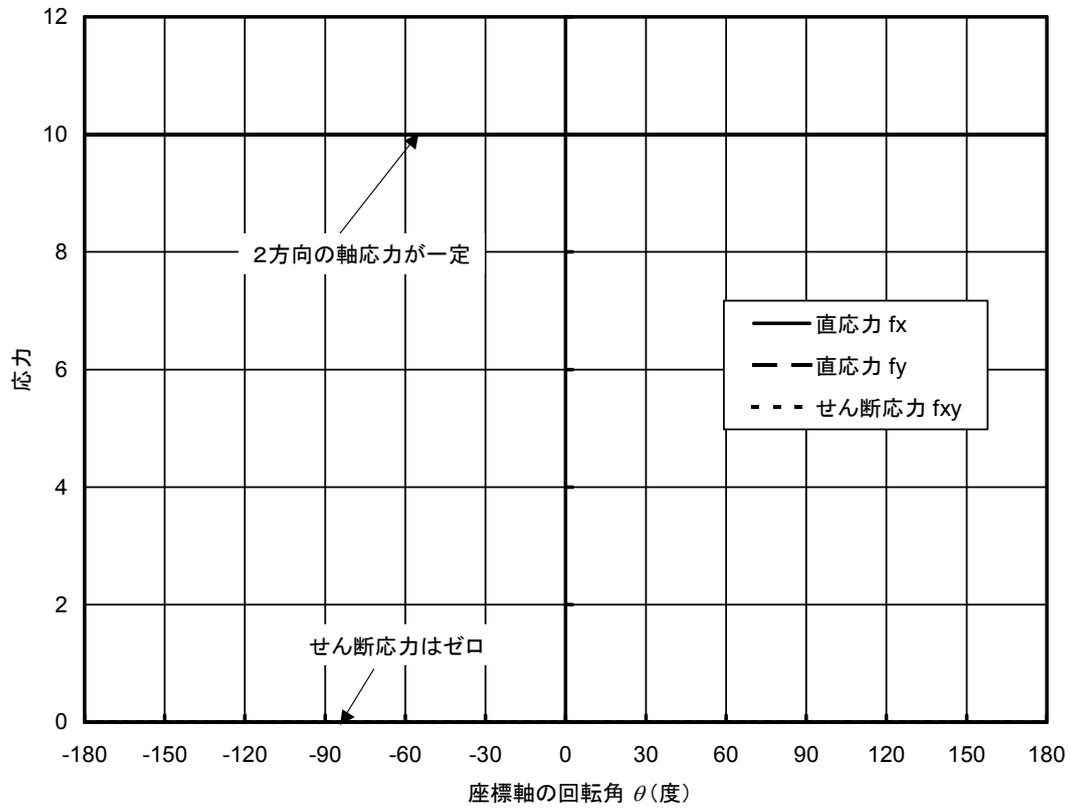


図 3-16 2軸応力の成分が等しい場合の座標変換

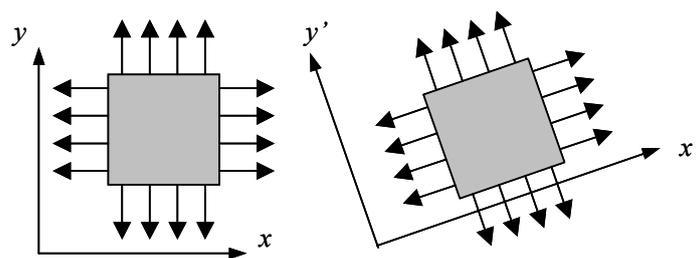


図 3-17 2軸応力の成分が等しい場合

3.6.2 歪

歪 (Strain) は構造部材の変形率を表す指標である。図 3-18 のように、支持された物体に外力が負荷されている状態を考える。この物体の点 A における変形の状態を表すには、変位 (Displacement) と歪 (Strain) を使う。変位とは、ある点 A の座標が変形後に新しい位置、点 A' に動いたときの新しい座標との差のことである。変位を以下のように表す。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= x' - x \\ v(x, y, z) &= y' - y \\ w(x, y, z) &= z' - z \end{aligned}$$

歪とは、ある点において物体の微小な要素の長さの変化率と角度の変化率である。ある点において、直交する 3 つの軸に関してそれぞれ 3 つの歪成分で歪状態が定義される。 ε は長さの伸び (縮み) (Normal Strain) を示し、その添字は伸び (縮み) の方向の座標軸を示す。 γ は角度の変化、すなわちせん断歪 (Shear Strain) を示し、その添字は面を示す。

変位と歪の関係式は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} = \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_{zz} = \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & \gamma_{zx} = \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

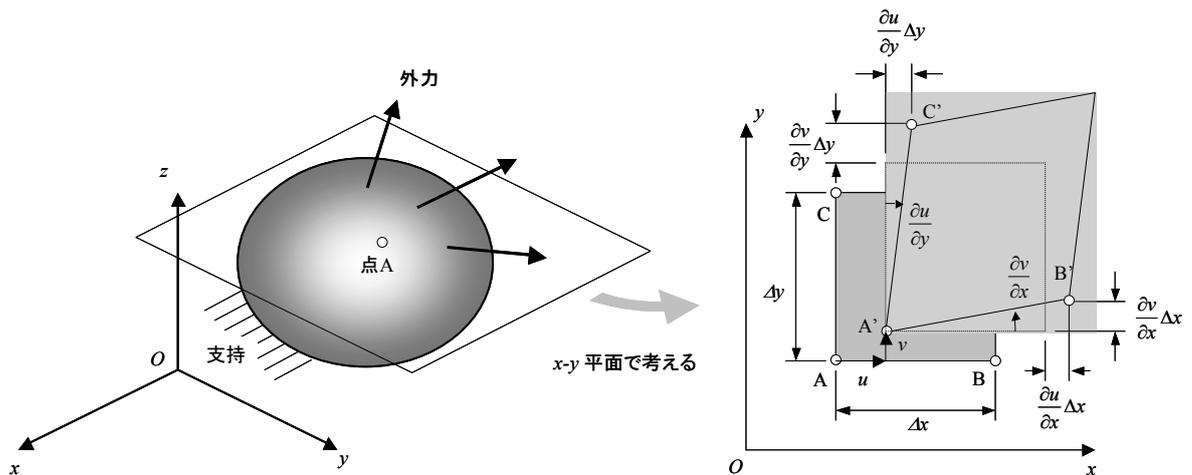


図 3-18 歪の定義

9 つの応力成分のうち、せん断歪にはせん断応力と同様の対称性があり、独立な成分は 6 つである。歪をマトリックスで表示すると以下ようになる。せん断歪に 1/2 をかけてあるのは、座標変換のためである。

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

3.6.2.1 1次元歪

棒要素で説明する。棒要素の場合には、軸方向に伸びる（または、縮む）とともに、横方向に縮む（または、伸びる）。軸方向歪は単位長さあたりの伸び（縮み）である。一定断面の棒の場合、荷重方向の軸歪は図 3-19 のように表示される。

図 3-19 に示すように、棒の長手方向（ x 軸方向）に力（軸力（Axial Force）と呼ぶ）がはたらいて長さ L の棒が長さ L' に伸びたとき、長手方向の歪は、次のように表示できる。

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{L' - L}{L}$$

このとき、 y 方向、 z 方向にも縮むので軸歪 $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_z$ も発生しているが、長手方向の軸歪にだけ注目すればよい。

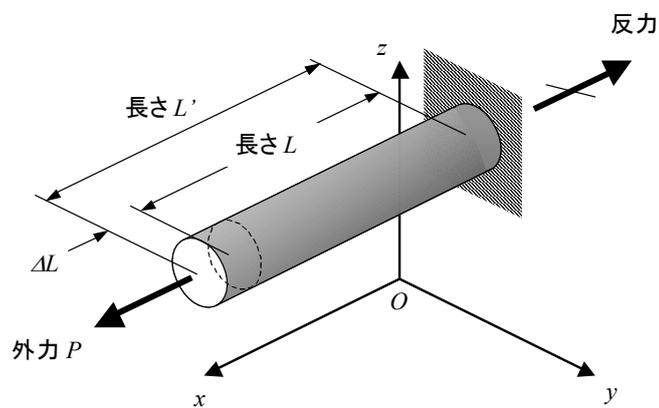


図 3-19 1次元歪

3.6.2.2 2次元歪

面内板要素で説明する。図 3-20 に示すように、板の面内にはたらく応力は2軸応力状態にあり、 f_x, f_y, f_{xy} の3成分で表すことができる。この状態を平面応力 (Plane Stress) 状態という。平面応力状態のときには、 z 方向の軸歪も発生するが、 xy 面内の歪だけに注目すればよい。面内板要素に平面応力が働く場合、歪は2次元であり、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ の3つの成分を持つ。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z \neq 0$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 0$$

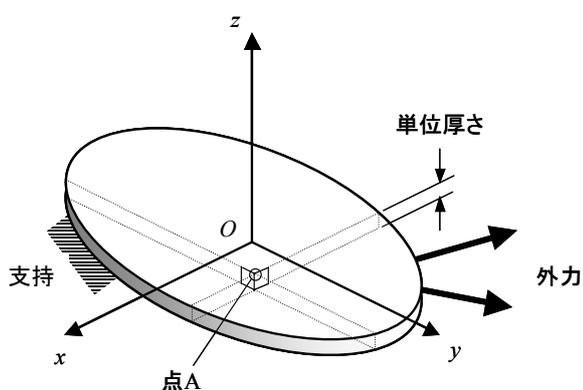


図 3-20 2次元歪

3.6.2.3 2次元歪の座標変換

実際の構造計算で必要なのは2次元歪の座標変換である。2次元歪の場合に、座標系 Oxy で表した歪状態を別の座標系 $Ox'y'$ で表示する式を以下に示す。

座標系 Oxy の歪を次のようにマトリックス形で表す。

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

同じように、座標系 $Ox'y'z'$ の歪を次のように表す。

$$[\boldsymbol{\varepsilon}'] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} & \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{y'x'} & \varepsilon_{y'} \end{bmatrix}$$

応力の座標変換で使用した方向余弦マトリックスを使って座標変換式を次のよう書ける。この式の形は応力の座標変換式と同じである。

$$[\boldsymbol{\epsilon}'] = \begin{bmatrix} \epsilon_{x'} & \frac{1}{2}\gamma_{x'y'} \\ \frac{1}{2}\gamma_{y'x'} & \epsilon_{y'} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}][\boldsymbol{\epsilon}][\mathbf{T}]^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

別の表現で書き直すと、

$$(\boldsymbol{\epsilon}') = \begin{pmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

3.6.2.4 2次元歪の主歪

応力の場合と同じように、2次元歪場において、せん断歪 γ_{xy} がゼロになり直歪だけになる座標系が必ず存在する。この座標系における直歪を主歪 (Principal Strain) と呼ぶ。この主歪の大きい方 ϵ_1 を最大主歪 (Maximum Principal Strain)、小さい方 ϵ_2 を最小主歪 (Minimum Principal Strain) と呼ぶ。

2次元歪 $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})$ における主歪の向きとその大きさの計算式を以下に示す。
主歪の方向は、

$$\begin{aligned} \gamma_{x'y'} = 0 &= -2(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos \alpha \sin \alpha + \gamma_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cos 2\alpha &= 0 \\ \alpha &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \right) \end{aligned}$$

逆正接関数 \tan^{-1} では得られた角度が最大主歪の方向か最小主歪の方向かが決まらない。Excel等の計算プログラムで計算する場合には、ATAN2関数を使えば象限も含めて最大主歪の方向が決まる。

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ATAN2} \left(\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \right)$$

主歪の大きさは次のようになる。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_x + \epsilon_y + \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \right) \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_x + \epsilon_y - \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \right) \end{aligned}$$

せん断歪が最大となるのは、主歪の向きから45度ずれた方向であり、最大せん断歪の大きさは、

$$\gamma_{xy, \max} = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

である。

主応力の式と比較すると、せん断応力の代わりに $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ (せん断歪の2分の1) を使うのが異なるだけである。

3.6.3 フックの法則

応力が降伏応力以下では、応力と歪は比例する（図 3-21）。これをフックの法則（Hooke's Law）という。

3.6.3.1 1次元のフックの法則

まず、簡単な例として、図 3-19 の 1次元の棒要素を考える。

フックの法則は次のように表される。

$$f_x = E\varepsilon_x \quad \text{or} \quad \varepsilon_x = \frac{f_x}{E}$$

$$f_x = \frac{P}{A}, \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{L' - L}{L}$$

ポアソン比（Poisson's Ratio） ν の効果で、 y 方向と z 方向の歪も発生している。

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{f_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{f_x}{E}$$

ここで、

- f : 軸応力
- ε_x : 荷重方向の歪
- $\varepsilon_y, \varepsilon_z$: 荷重と直角方向の歪
- E : ヤング率（Young's Modulus）
- ν : ポアソン比（Poisson's Ratio）

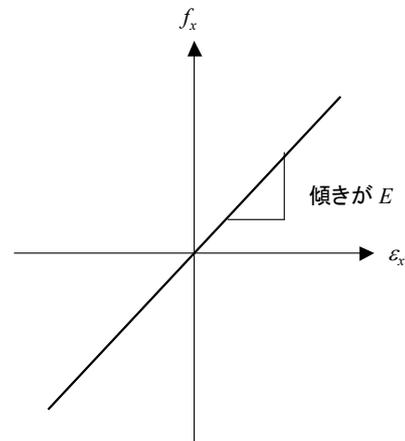


図 3-21 フックの法則

3.6.3.2 2次元（平面応力）のフックの法則

材料には、等方性材料と異方性材料がある。等方性材料（Isotropic Material）は、ヤング率がすべての方向について一定である材料である。異方性材料（Anisotropic Material）はヤング率が方向によって異なる材料である。異方性材料の好例は木材や竹材である。

(1) 等方性材料のフックの法則

まず、等方性材料の 2次元のフックの法則の式を示す。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xy} \end{pmatrix}$$

G はせん断弾性剛性であり、せん断応力とせん断歪の間の比例定数である。

$$f_{xy} = G\gamma_{xy}$$

等方性材料の場合には、せん断弾性剛性とヤング率とポアソン比の間には次の関係式が成り立つ。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

z 方向の歪を無視すると、

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xy} \end{pmatrix}$$

書き換えると、

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

(2) 直交異方性材料のフックの法則

直交異方性材料 (Orthotropic Material) とは、弾性特性が3つの直交する軸に関して対称性がある材料のことである。竹を思い浮かべてもらうとよい (図 3-22)。竹は繊維が長手方向に走っていて、縦方向と横方向の剛性 (Stiffness) が異なる。縦 (繊維) 方向には固くて変形しにくい、横方向には柔らかく変形しやすい。

直交異方性材料でできた2次元面内板要素のフックの法則は次のように表される。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_1}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_{12} \end{pmatrix}$$

ここで、

1, 2: 材料主軸を表す。

E_1, E_2 : 材料主軸 1, 2 方向のヤング率

G_{12} : 材料主軸 1, 2 方向のせん断剛性

ν_1 : 1 軸方向に引っ張ったときの 2 軸方向の縮みと 1 軸方向の伸びの比 (ポアソン比)

ν_2 : 2 軸方向に引っ張ったときの 1 軸方向の縮みと 2 軸方向の伸びの比 (ポアソン比)

ヤング率とポアソン比の間には次の関係がある。

$$\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2} & \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}$$

この式は、複合材の積層板解析の基礎になる重要な式である。複合材の力学を学びたい人には、MIL-HDBK-17（文献[2-6]）を精読することを勧める。

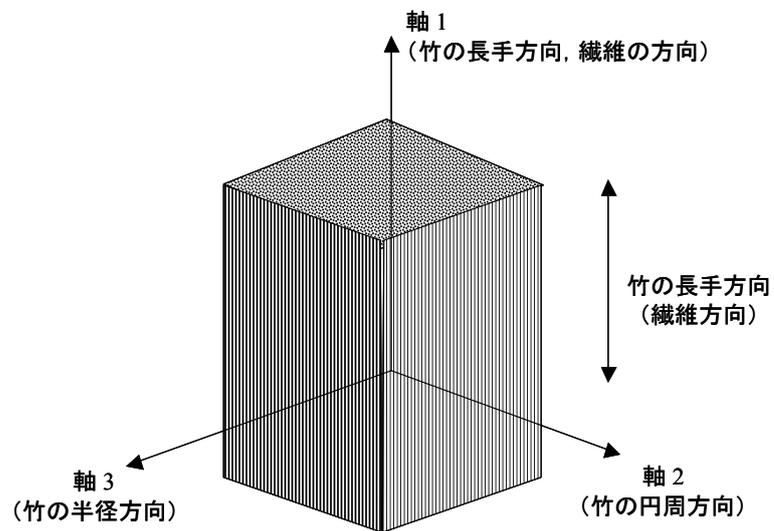


図 3-22 直交異方性材料の主軸

3.6.4 歪ゲージによる歪の計測とデータ整理

航空機の開発では構造強度試験を実施して解析の検証と強度の実証を行う。構造強度試験で構造内の応力分布を知るために歪ゲージを使って歪を計測する。どこに歪ゲージを貼るべきか、計測した歪データからどうやって応力を計算するかを説明する。

3.6.4.1 歪ゲージ

歪ゲージは大きき数 mm のシート状のセンサーである（図 3-23）。構造物に歪ゲージを接着剤で貼ることにより、貼った表面の歪を計測することができる。その原理は、歪ゲージの金属線の長さが変化することによって電気抵抗が変化することに基づいている。

歪ゲージには、単軸ゲージ、2軸（クロス）ゲージ、3軸（ロゼット）ゲージの3種類があり（図 3-24）、計測したい歪に応じて使い分ける。単軸ゲージで伸び（または圧縮）歪を計測できる。2軸ゲージを使えばせん断歪を計測できる。3軸ゲージでは2次元の歪成分（ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ）を測ることができる。

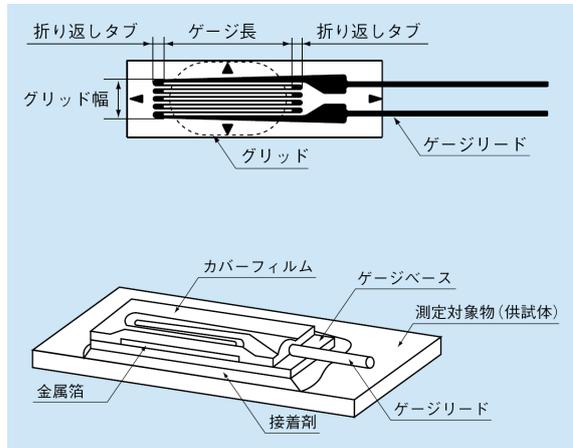


図 3-23 歪ゲージの構造（東京測器研究所の資料より）



図 3-24 歪ゲージの種類（東京測器研究所の資料より）

3.6.4.2 歪ゲージを貼る場所

強度試験の供試体に歪ゲージを貼る場合の考え方について説明する。

棒状の軸力部材にはその一般部断面に2枚の単軸ゲージを貼る。曲げが入っても軸力を算出することができる。荷重-歪線図から座屈荷重を決めることもできる。

せん断ウェブには、ペイの中央の表と裏に1枚ずつ2軸ゲージを45°傾けて貼ることにより、せん断応力を得ることができる。荷重-歪線図から座屈荷重を決めることもできる。

外板の歪を計るには、外板のペイの中央に3軸ゲージを表と裏に1枚ずつ貼る。こうすることにより、外板の面内力（軸力とせん断流）と曲げを求めることができる。荷重-歪線図から座屈荷重を決めることもできる。

3.6.4.3 歪ゲージの計測歪から応力の計算

(1) 対称断面の軸力部材に貼った1軸歪ゲージ

断面の反対側に1軸歪ゲージを貼ってあれば、軸応力と曲げ応力を分離することができる。軸歪は図 3-25 を参照して次のように表される。

$$\text{軸歪} : \varepsilon_{axial} = \frac{c_2 \varepsilon_1 + c_1 \varepsilon_2}{c_1 + c_2}, \text{ 特に } c_1 = c_2 \text{ のときは } \varepsilon_{axial} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

軸応力と軸力は、

$$f_{axial} = E \varepsilon_{axial}, \quad P = A f_{axial} = A E \varepsilon_{axial}$$

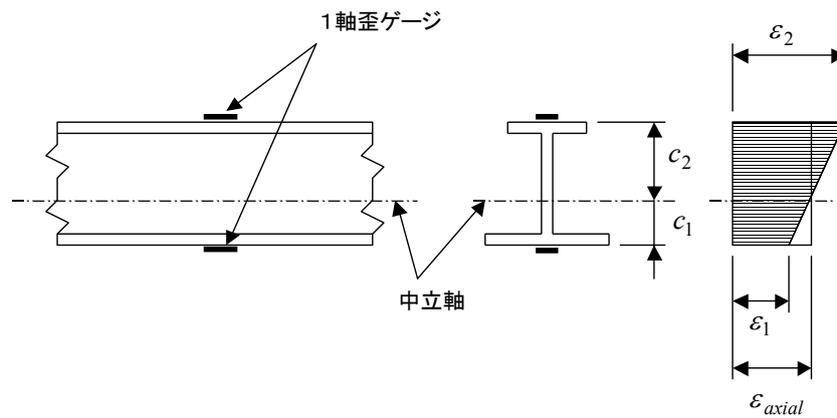


図 3-25 軸力部材の歪ゲージ

(2) せん断ウェブに貼った2軸歪ゲージ

ウェブの表と裏に貼った2軸歪ゲージ (図 3-26) の出力の平均を $\bar{\varepsilon}_a$ と $\bar{\varepsilon}_b$ とする。ウェブ中央面のせん断歪 $\bar{\gamma}_{xy}$ は次の式のように表される。

$$\bar{\gamma}_{xy} = \bar{\varepsilon}_a - \bar{\varepsilon}_b$$

せん断応力 \bar{f}_{xy} とせん断流 q は、せん断弾性係数を G 、板厚を t とすると、

$$\bar{f}_{xy} = G\bar{\gamma}_{xy}, \quad q = \bar{f}_{xy}t = G\bar{\gamma}_{xy}t$$

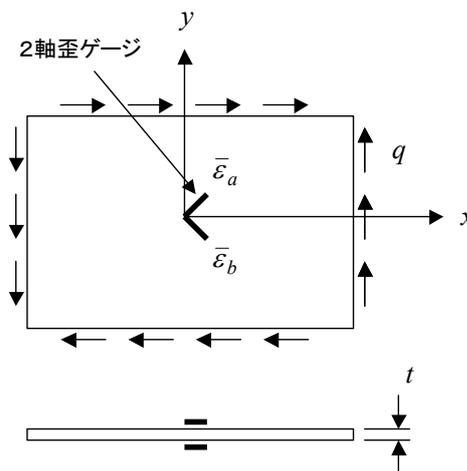


図 3-26 せん断ウェブの歪ゲージ

(3) 3軸歪ゲージ

板の表と裏に貼った3軸歪ゲージ (図 3-27) の出力の平均を $\bar{\varepsilon}_a$ 、 $\bar{\varepsilon}_b$ 、 $\bar{\varepsilon}_c$ とする。板の中央面の歪成分 $\bar{\varepsilon}_x$ 、 $\bar{\varepsilon}_y$ 、

$\bar{\gamma}_{xy}$ は次の式のように表される.

$$\bar{\varepsilon}_x = \bar{\varepsilon}_a, \quad \bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_c, \quad \bar{\gamma}_{xy} = 2\bar{\varepsilon}_b - \bar{\varepsilon}_a - \bar{\varepsilon}_c$$

等方性材料の場合、ヤング率を E 、ポアソン比 ν をとすると、板の中央面の応力成分は、

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \\ \bar{f}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E & \nu E & 0 \\ \nu E & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{pmatrix}$$

主応力とその方向は、

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{2} \left(\bar{f}_x + \bar{f}_y + \sqrt{(\bar{f}_x - \bar{f}_y)^2 + 4\bar{f}_{xy}^2} \right)$$

$$\bar{f}_2 = \frac{1}{2} \left(\bar{f}_x + \bar{f}_y - \sqrt{(\bar{f}_x - \bar{f}_y)^2 + 4\bar{f}_{xy}^2} \right)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ATAN} 2 \left(\frac{2\bar{f}_{xy}}{\bar{f}_x - \bar{f}_y} \right)$$

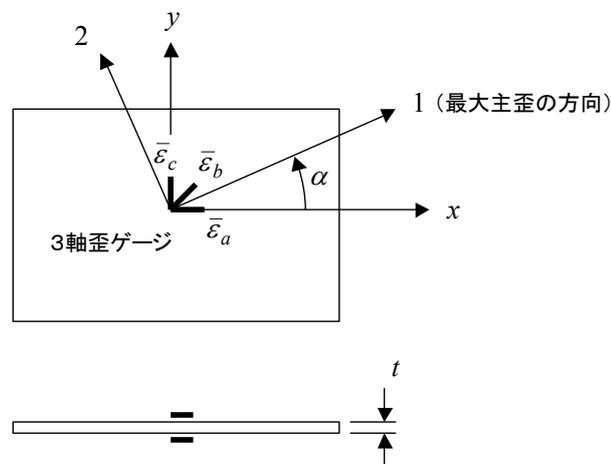


図 3-27 板の歪ゲージ

3.7 エネルギー原理

MS-Excel の「ソルバー」の機能（最適化）とエネルギー原理（Energy Principle）を組み合わせることにより、これまで有限要素法でしかできなかった構造解析が簡単にできるようになった。この方法の応用範囲はひじょうに広いので、その基礎となるエネルギー原理を紹介しておく。

3.7.1 歪エネルギーとコンプリメンタリ・エネルギー

歪エネルギー（Strain Energy）とは、構造部材が変形したときに構造部材の内部に蓄えられるエネルギーのことである。ばねを使った歪エネルギーの説明を図 3-28 に示す。

変位 u と荷重 P の関係は、

$$P = ku$$

ここで、 k はばね定数である。

ばねに蓄えられるエネルギー U は、

$$U = \int P du = \int kudu = \frac{1}{2} ku^2$$

このエネルギーはばねの歪によって蓄えられているので歪エネルギーと呼ぶ。

歪エネルギーは図 3-28 に示す変位-荷重曲線の下の面積を表している。見方を変えて、荷重-変位曲線の上の面積を積分すると、これをコンプリメンタリ・エネルギー（Complimentary Energy）と呼ぶ。荷重-変位曲線が直線の場合には、歪エネルギーとコンプリメンタリ・エネルギーは等しいが、荷重-歪曲線が非線形の場合には両者は等しくならない。

コンプリメンタリ・エネルギーの式は次のようになる。コンプリメンタリ・エネルギーでは荷重がパラメータになる。

$$U_c = \int udP = \int \frac{P}{k} dP = \frac{1}{2k} P^2$$

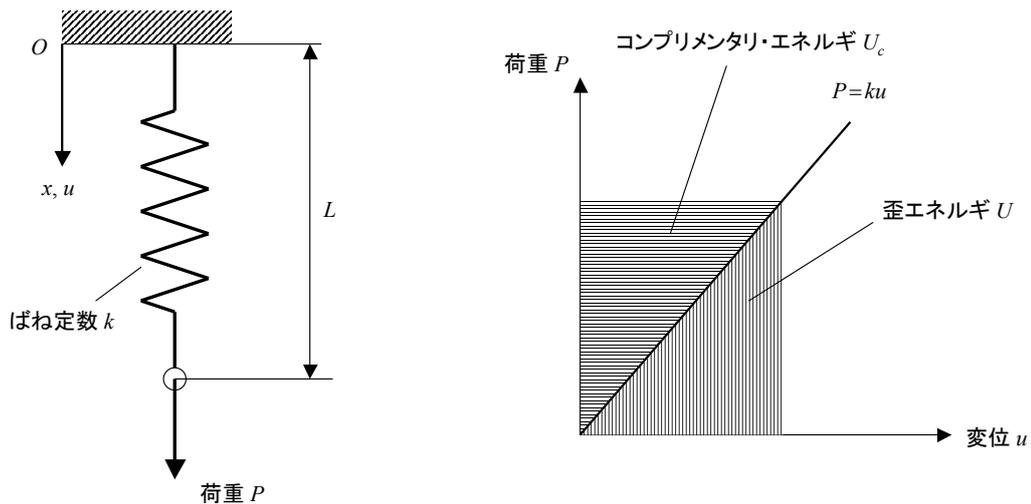


図 3-28 ばねの歪エネルギーとコンプリメンタリ・エネルギー

3.7.1.1 軸力一定の棒要素

軸力が一定の棒要素の歪エネルギーとコンプリメンタリ・エネルギーの式は、ばねの場合とほとんど同じで、ばね定数 k を $\frac{EA}{L}$ で置き換えればよい (図 3-29). 軸力 P が負荷されている断面積 A , 長さ L の棒要素を考えると, フックの法則は次のように表すことができる.

$$P = EA\varepsilon_x = EA \frac{u}{L}$$

歪エネルギー U は,

$$U = \int P du = \int \frac{EA}{L} u du = \frac{EA}{2L} u^2$$

コンプリメンタリ・エネルギー U_c は,

$$U_c = \int u dP = \int \frac{PL}{EA} dP = \frac{L}{2EA} P^2$$

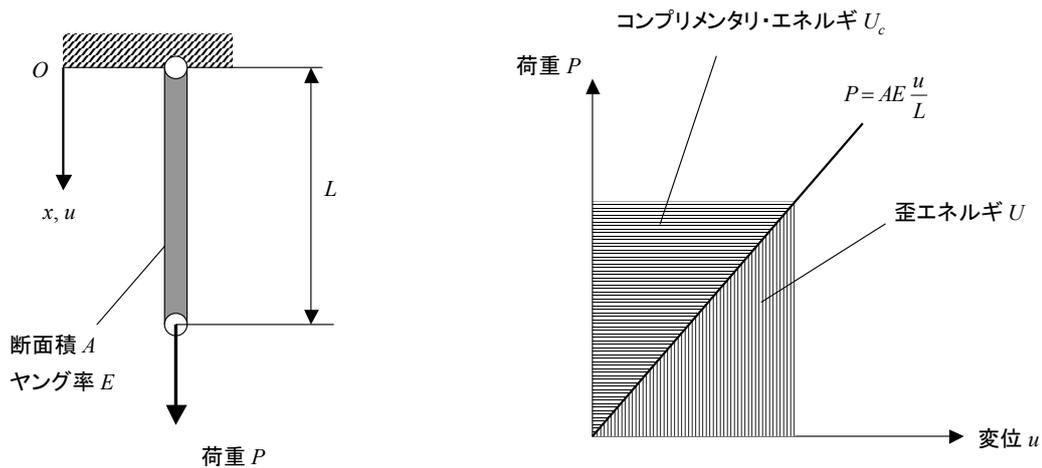


図 3-29 棒要素の歪エネルギーとコンプリメンタリ・エネルギー

3.7.1.2 軸力が線形に変化する棒要素

軸力が線形に変化する棒要素 (図 3-30) は, せん断場理論 (4.5 項参照) で用いられる. この棒要素のコンプリメンタリ・エネルギー U_c は両端の軸力を P_1, P_2 (引張を正) すると次のように表すことができる.

$$\begin{aligned} U_c &= \int_0^L \frac{P(x)^2}{2EA} dx = \frac{1}{2EA} \int_0^L (P_1 - qx)^2 dx = \frac{1}{2EA} \left[-\frac{1}{3q} (P_1 - qx)^3 \right]_0^L = \frac{1}{6EAq} \{ -(P_1 - qL)^3 + P_1^3 \} \\ &= \frac{L(P_1^2 + P_1P_2 + P_2^2)}{6EA} \end{aligned}$$

ここで、 q ：隣接するせん断パネルから入ってくるせん断流 $q = \frac{P_1 - P_2}{L}$

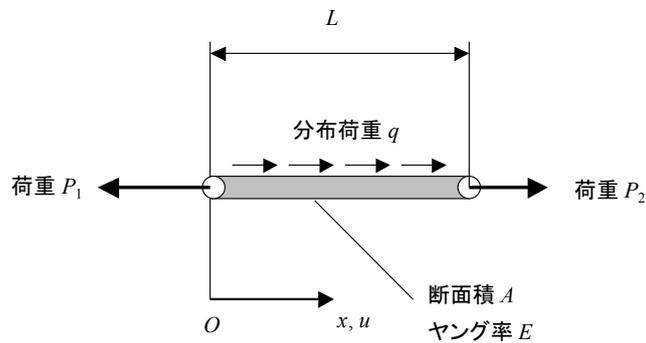


図 3-30 軸力が線形に変化する棒要素

3.7.1.3 長方形せん断パネル

せん断パネルとは、純せん断荷重が働く板要素のことで（図 3-31 参照）、せん断場理論（4.5 参照）で用いられる。せん断応力 f_s に板厚 t を掛けた量をせん断流 q と呼ぶ。長方形せん断パネルのコンプリメンタリ・エネルギー U_c は次のように表すことができる。

$$U_c = \int_V \left(\frac{f_s^2}{2G} \right) dV = \frac{1}{2G} \int_A \left(\frac{q}{t} \right)^2 t dA = \frac{q^2 ab}{2Gt}$$

- ここで、 G ：せん断弾性係数
- A ：せん断パネルの面積
- t ：せん断パネルの板厚
- q ：せん断流

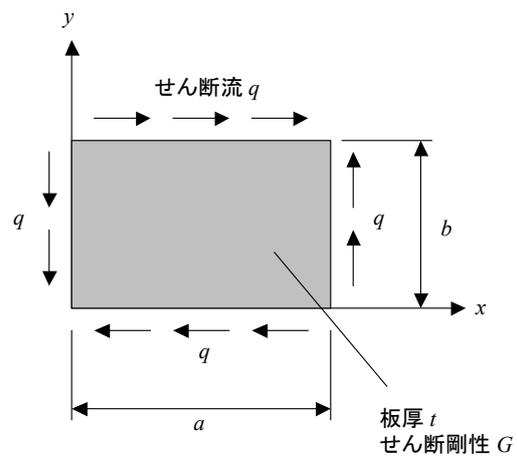


図 3-31 長方形せん断パネル

3.7.2 エネルギー原理の利用方法

構造が釣り合いを保っているときには、釣り合いの状態からはずれようとする外乱が働くと、もとの状態にもどそうとする力が発生し、安定な状態にもどる。釣り合いの状態では、その系のエネルギーが極値をとっている。これがエネルギー原理である。

3.7.2.1 最小ポテンシャル・エネルギーの原理

全ポテンシャル・エネルギー V は、構造に蓄えられる歪エネルギーの総和から外力がなす仕事を引いたものであり、次のように表される。

$$V = \sum_{\text{全構造}} U_i - \sum_{\text{全外力}} P_j \delta_j$$

ここで、 U_i は各構造要素の歪エネルギー、 P_j は外力、 δ_j は外力の方向の変位である。

最小ポテンシャル・エネルギーの原理は次のように記述される。

「(a)与えられた変位境界条件を満たし、(b)幾何学的に矛盾のない変形状態のうちで、(c)釣り合い条件を満たすものは、(d)全ポテンシャル・エネルギーを最小にする。」

最小ポテンシャル・エネルギーの原理を内部荷重解析に使うには次のようにする。

- ① 変位のパラメータ（変数）を使って、(a) (b)の条件を満たす変位状態を仮定する。
- ② 全ポテンシャル・エネルギーを、変位パラメータを使って表示する。
- ③ 全ポテンシャル・エネルギーを最小にする変位パラメータを求める。
- ④ 決定した変位パラメータで変位状態と応力状態を表示したものが解である。

最小ポテンシャル・エネルギーの原理で図 3-32 のばねの問題を解いてみる。

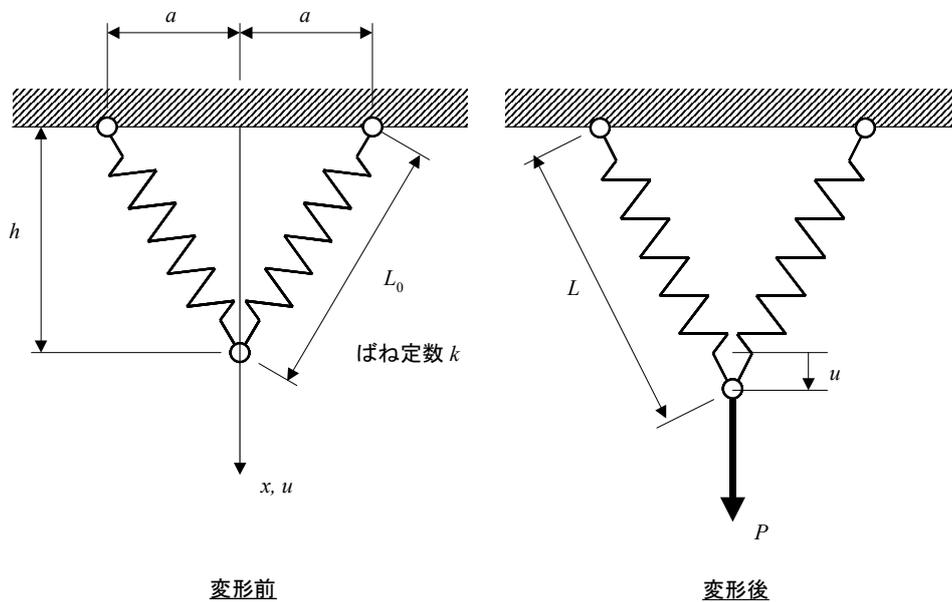


図 3-32 2本のばね

荷重 P が負荷されたときの変位を u とする。変形前と後のばねの長さは次のように書ける。

$$L_0 = \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$L = \sqrt{a^2 + (h+u)^2}$$

ばねの歪エネルギーは、

$$U = 2 \times \frac{1}{2} k(L - L_0)^2 = k \left[\sqrt{a^2 + (h+u)^2} - \sqrt{a^2 + h^2} \right]^2$$

外力による仕事は、

$$W = Pu$$

ポテンシャル・エネルギーは次のようになる。

$$V = U - W$$

$$= k \left[\sqrt{a^2 + (h+u)^2} - \sqrt{a^2 + h^2} \right]^2 - Pu$$

(1) 変位がじゅうぶん小さい場合（線形解）

ばねがかたくて変位 u が a や h に比べてじゅうぶん小さければ、ポテンシャル・エネルギーの式は次のように近似でき、線形化できる。

$$V = \frac{kh^2}{\left(\sqrt{a^2 + h^2}\right)^2} u^2 - Pu = \frac{kh^2}{L_0^2} u^2 - Pu$$

ポテンシャル・エネルギーを最小化するには、ポテンシャル・エネルギーの式を変位 u で微分して、ゼロとおく。

$$\frac{dV}{du} = \frac{2kh^2}{L_0^2} u - P = 0$$

したがって、

$$u = \frac{PL_0^2}{2kh^2}$$

ばねに働く力 F は

$$F = k(L - L_0) = k \left(\sqrt{a^2 + (h+u)^2} - \sqrt{a^2 + h^2} \right) = k\sqrt{a^2 + h^2} \left[\sqrt{\frac{a^2 + h^2 + 2hu + u^2}{a^2 + h^2}} - 1 \right]$$

$$\cong k\sqrt{a^2 + h^2} \left[\frac{hu}{a^2 + h^2} \right] = \frac{kh}{L} \frac{PL^2}{2kh^2} = \frac{PL}{2h}$$

(2) 変位が小さくない場合の厳密解

ばねがやわらかくて、変位が大きい場合には、この問題は幾何学的非線形問題（Geometrically Non-linear Problem）になる。この場合には、数値解を求めることになる。以下に MS-Excel の「ソルバー」を使って解く方法を紹介する。

数値例として、 $a = 250$ mm, $h = 250$ mm, $k = 50$ N/mm, $P = 2000$ N とする。表 3-5 に MS-Excel の「ソルバー」を使って解いた結果を示す。変位 u に仮の値を入力しておき、変形前後のばねの長さを計算し、歪エネルギーを求める。同じように、仮定した変位による外力のなす仕事を計算し、歪エネルギーから差し引いて全ポテン

シャル・エネルギーを求める。変位 u をパラメータとして、全ポテンシャル・エネルギーを数値的に最小化して変位 u が決まる。表 3-5 に線形解との比較も示した。厳密解では、ばねが伸びることによって荷重の向きが変わる影響が考慮されているのに対し、線形解では、荷重の向きは変形前と同じであると仮定している。このため、変形が大きくなると、線形解の誤差が大きくなる。

表 3-5 ばねの問題の解 – MS-Excel の「ソルバー」によるポテンシャル・エネルギーの最小化

ばねの問題

寸法	a	(mm)	250
	h	(mm)	250
ばね定数	k	(N/mm)	50
荷重	P	(N)	2000

厳密解

変位	u	(mm)	36.32	← 変化させるパラメータ
ばねの初期長さ	L0	(mm)	353.6	
変形後のばねの長さ	L	(mm)	380.1	
全歪エネルギー(ばね2本)	U	(N-mm)	35247.7	
外力のなす仕事	W	(N-mm)	72640.7	
全ポテンシャル・エネルギー	V	(N-mm)	-37392.9	← 最小化する値
ばねの力	F	(N)	1327.5	

線形解

				誤差
変位	u	(mm)	40	10.1%
ばねの力	F	(N)	1414.2	6.5%

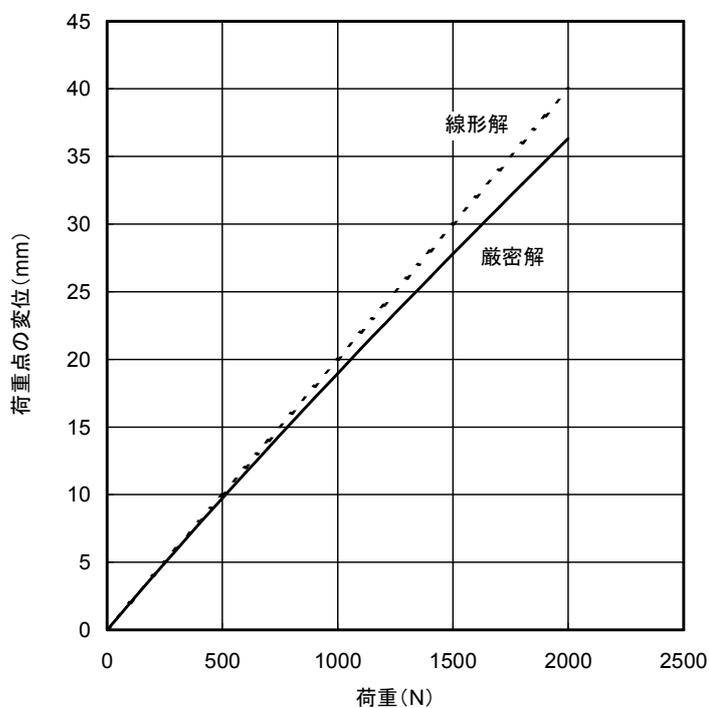


図 3-33 2本のばねの問題の荷重 – 変位線図

3.7.2.2 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理

全コンプリメンタリ・エネルギーは構造のコンプリメンタリ・エネルギーの総和から強制変位がなす仕事を引いたものであり、次のように表すことができる。

$$U_c = \sum_{\text{全構造}} U_{ci} - \sum_{\text{全強制変位}} P_j \delta_j$$

ここで、 U_{ci} は各構造要素の歪エネルギー、 P_j 強制変位が与えられる点の強制変位方向の内力、 δ_j は強制変位である。

最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理は次のように記述される。

「(a)与えられた応力境界条件を満たし、(b)釣り合い方程式を満たしているすべての応力状態のうちで、(c)幾何学的に矛盾のない変形状態のものは、(d)全コンプリメンタリ・エネルギーを最小にする。」

最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理を内部荷重解析に使うには次のようにする。

- ⑤ 応力のパラメータ（変数）を使って、(a)(b)の条件を満たす応力状態を仮定する。
- ⑥ コンプリメンタリ・エネルギーを、パラメータを使って表示する。
- ⑦ コンプリメンタリ・エネルギーを最小にするパラメータを求める。
- ⑧ 決定したパラメータで変位状態と応力状態を表示したものが解である。

最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理の適用例を 4.2.2.1 項に示す。最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理は不静定構造の解析をするのに有用である。

3.7.3 補足：MS-Excelによる最小化の方法

最小化の方法は、エネルギーの方程式を微分して極値を求める方法がよく使われている。材料力学の教科書にはこの方法の例が載っている。しかし、微分を使う方法は方程式の計算が面倒であるのが難点である。変数が多くなると計算が著しく面倒になるため、エネルギー原理は実用的な方法ではなくなってしまう。

現在では、パーソナル・コンピュータが発達したため、数値計算で最小化ができるようになった。表計算の標準ソフトウェアであるMS-Excelには「ソルバー」と呼ばれる最適化の機能がある。この機能を使えば、微分が不要になり、エネルギーを最小にするパラメータを求めることができる（参考文献[2-4]）。変数が多くなっても手間は変わらない。「ソルバー」を使うことにより、エネルギー原理の適用範囲が広がる。

4 内部荷重の解析

本章では、内部荷重の解析法を基本的な構造から複雑な構造へと順を追って説明していく。

4.1 剛体要素の釣り合いとフリーボディ・ダイアグラムの例

3.4 項で説明したように、静定構造の場合には、構造要素を剛体 (Rigid Body) と考えて力の釣り合い式を立てて、その連立方程式を解けば内部荷重を求めることができる。たとえば、航空機構造解析の現場で出てくる金具の多くは、力の釣り合いだけで反力を求めることができ、フリーボディ・ダイアグラムを描くことができる。反力の解析には静力学の知識だけでじゅうぶんである。

本項では航空機構造で実際に出てくる構造を例にとって、剛体とみなせる構造要素の反力の計算方法を説明する。

4.1.1 脚構造のトルク・リンク

図 4-1 は Bruhn の本の例題 (図 A2.60) で、脚の内側シリンダーの回転を止めるトルク・リンク (Torque Link) の構造を示している。下の内側シリンダーに働くトルクを 24952 inch-lb とする。このトルクを上下2つのトルク・リンク間の横向きの力 (紙面に垂直な力) で上のシリンダーに伝える。トルクのアームが 9 inch であるから、この力は、 $24952 \div 9 = 2772.4 \text{ lb}$ である。

次に、上側トルク・リンク自身の釣り合いを考える。横力のオフセットによるモーメントはシリンダーにつながっている2つのラグの偶力 R でとるので、モーメントの釣り合い式は次のようになる。

$$2.75 \times R = 8.5 \times 2772.4$$

これを解くと、

$$R = \frac{8.5 \times 2772.4}{2.75} = 8569 \text{ lb}$$

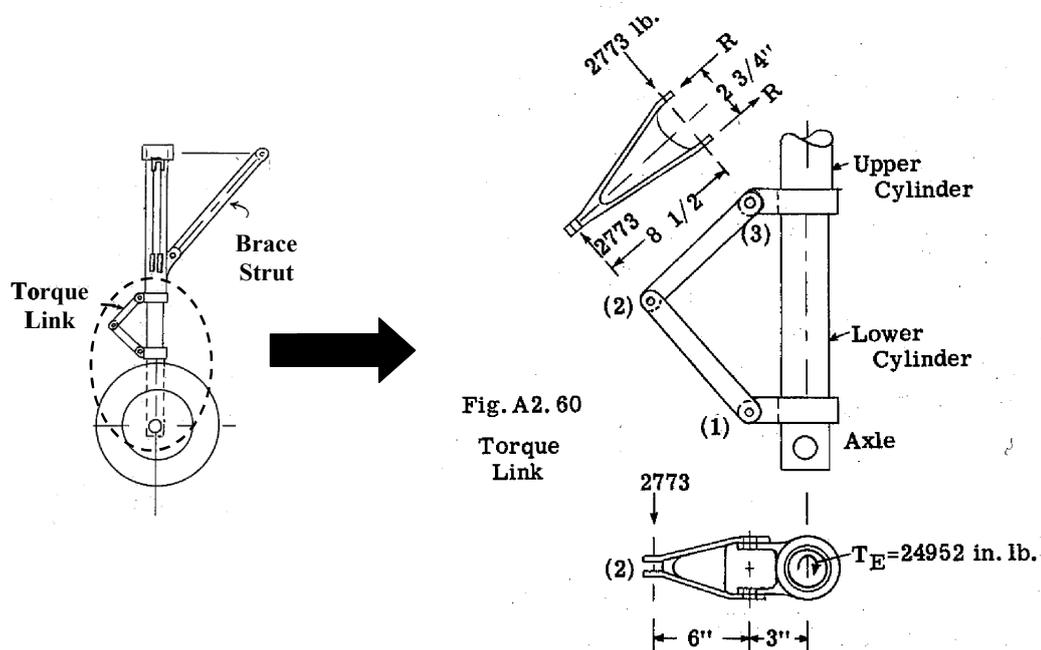


図 4-1 トルク・リンク

4.1.2 アイドラー・リンク

アイドラー・リンク (Idler Link) は、特定の方向の荷重を逃がすのに使われる金具である。図 4-2 に示すのは舵面のヒンジ金具をつなぐのに使われるアイドラー・リンクの例である。アイドラー・リンクと機体側ヒンジ金具は通しボルトで結合されており、回転可能になっているため、ヒンジライン方向の荷重が機体側のヒンジ金具に入らない。

舵面側から上向き荷重 P_z と後向き荷重 P_x が負荷されるとする。このとき、上向き荷重の反力は機体側ヒンジ金具の上側ラグの面でとり、後ろ向き荷重の反力は、通しボルトのせん断荷重でとる。モーメントは、通しボルトとブッシュの当たり面のせん断力の偶力でとる。図 4-2 に反力を記入してあるが、矢印の向きは任意に決めればよい。計算結果が負になれば反力の向きが逆であったことがわかる。一番大事なことは、釣り合い式の計算ではなく、作用力と反力を正しく描くことである。フリーボディー・ダイアグラムを正しく描けなければ正しい答えは得られない。以下に反力の計算を示す。

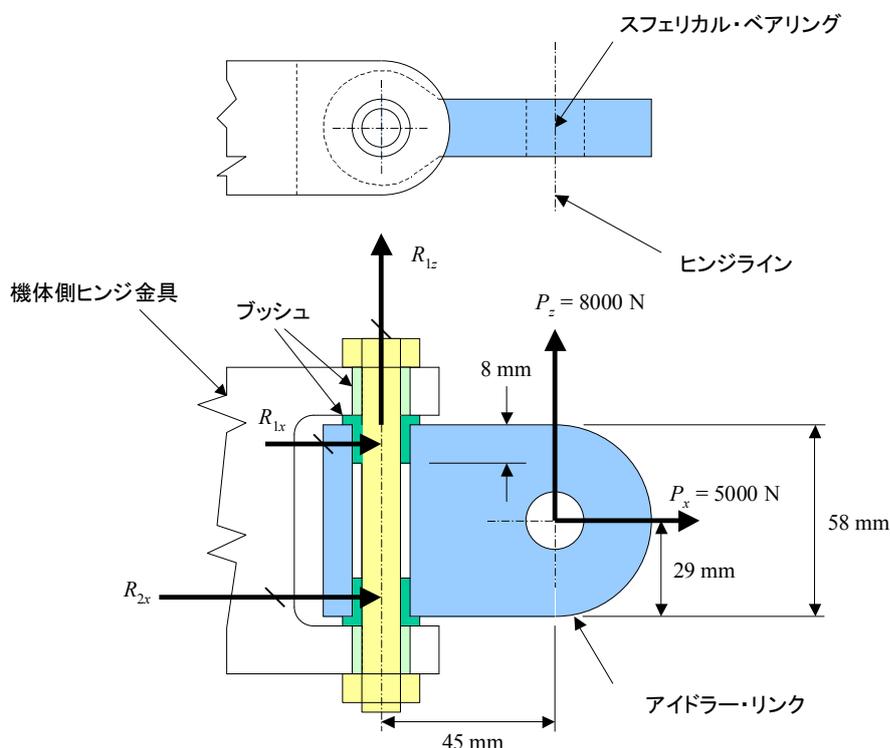


図 4-2 アイドラー・リンク

点 1 まわりのモーメントの釣り合いは、

$$-5000 \times 25 - 8000 \times 45 - R_{2x} \times 50 = 0$$

x 方向の力の釣り合いは、

$$R_{1x} + R_{2x} + 5000 = 0$$

z 方向の力の釣り合いは、

$$R_{1z} + 8000 = 0$$

以上の式を解くと、

$$R_{1x} = 4700 (N) \quad \text{右向き (図 4-2 の矢印の向き)}$$

$$R_{1z} = -8000 (N) \quad \text{下向き (図 4-2 の矢印の向きと逆)}$$

$$R_{2x} = -9700(N) \quad \text{左向き (図 4-2 の矢印の向きと逆)}$$

チェック：ヒンジラインまわりのモーメントは下の式のようにゼロになっているので計算は正しい。

$$-8000 \times 45 + 4700 \times 25 + 9700 \times 25 = 0$$

次に、ボルトにはたらく荷重を算出する。アイドラー・リンクからボルトに入る荷重は、図 4-3 に示すように
っている。反力はブッシュの面に均等に入るとして釣り合い式を書くと次のようになる。

$$R_{3x} - 4700 + 9700 - R_{4x} = 0$$

$$(9.5 + 25 + 25 + 9.5) \times R_{3x} - (25 + 25 + 9.5) \times 4700 + 9.5 \times 9700 = 0$$

これを解くと次の反力が得られる。

$$R_{3x} = \frac{59.5 \times 4700 - 9.5 \times 9700}{69} = 2717 \text{ lb} \quad \text{右向き (図 4-3 の矢印の向き)}$$

$$R_{4x} = 2717 - 4700 + 9700 = 7717 \text{ lb} \quad \text{左向き (図 4-3 の矢印の向き)}$$

これらの力を使って、せん断力分布と曲げモーメント分布を描くことができ、梁として強度を計算できる。

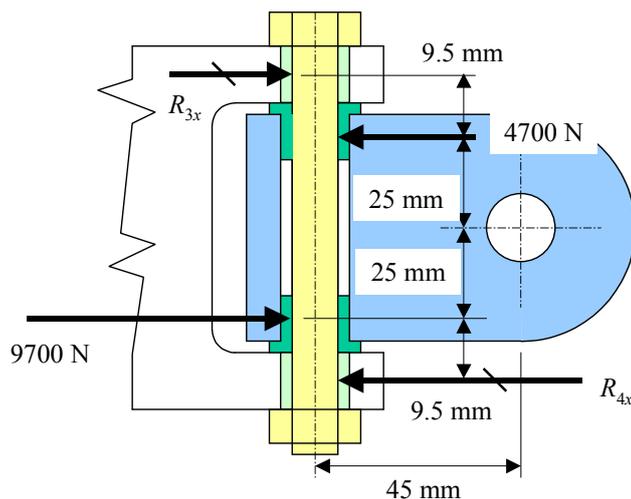
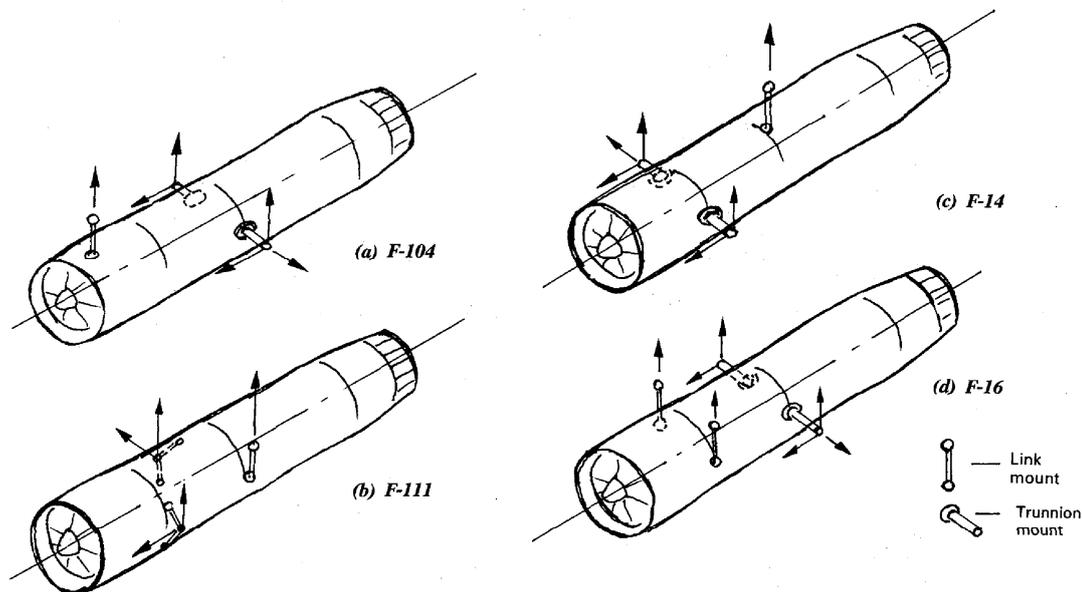


図 4-3 ボルトに入る荷重

4.1.3 エンジン取り付け点の反力

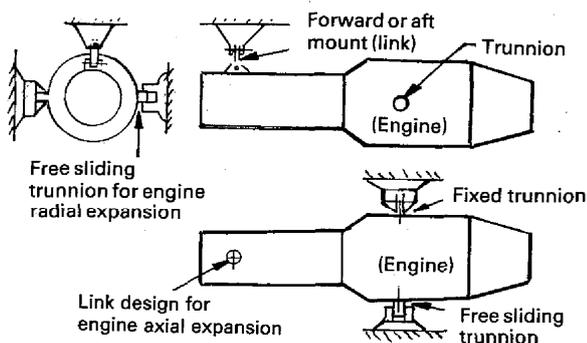
本項では、ジェット戦闘機のエンジン取り付け点の反力を計算する。

図 4-4 にエンジン・マウントの形式の種類と反力の取り方を示す。図 4-5 に F-104 タイプまたは F-14 タイプのエンジン・マウントの詳細を示す。各取り付け点で反力の取り方の役割がはっきり決まっていることと、エンジン本体の熱膨張を逃げる設計になっているに注意してほしい。



Examples of fuselage engine mounts — fighter airplanes.

図 4-4 エンジン・マウントの形式の種類 - ジェット戦闘機



Typical fuselage mount arrangement.

図 4-5 エンジン・マウントの荷重の取り方 - F-104 または F-14 タイプ

実際に、図 4-6 に示す F-104 タイプのエンジン・マウントの反力を計算してみよう。点 2, 3, 4 の y 座標は 0 であるとする。

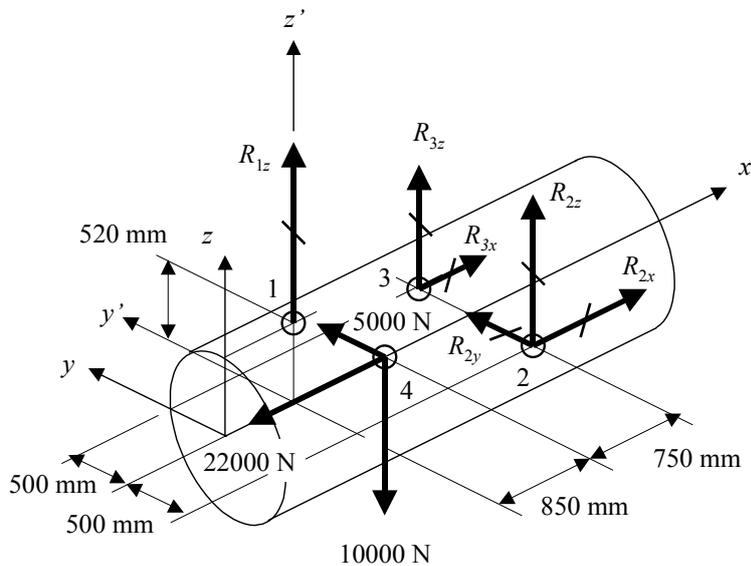


図 4-6 エンジン・マウントの反力の例題

$$x \text{ 方向} \quad -22000 + R_{2x} + R_{3x} = 0$$

$$y \text{ 方向} \quad 5000 + R_{2y} = 0$$

$$z \text{ 方向} \quad -10000 + R_{1z} + R_{2z} + R_{3z} = 0$$

$$x \text{ 軸まわり} \quad -R_{2z} \times 500 + R_{3z} \times 500 = 0$$

$$y' \text{ 軸まわり} \quad 10000 \times 850 - R_{2z} \times 1600 - R_{3z} \times 1600 = 0$$

$$z' \text{ 軸まわり} \quad 5000 \times 850 + R_{2y} \times 1600 + R_{2x} \times 500 - R_{3x} \times 500 = 0$$

この連立方程式を解くと次の解が得られる。

$$R_{1z} = 4687.5 \text{ N}$$

$$R_{2x} = 14750 \text{ N}, R_{2y} = -5000 \text{ N}, R_{2z} = 2656.25 \text{ N}$$

$$R_{3x} = 7250 \text{ N}, R_{3z} = 2656.25 \text{ N}$$

4.1.4 舵面構造

本項では、舵面を例にとって力の釣り合いから反力の求める計算を説明する。実際の構造では、舵面の取り付けはフェールセーフ性を考えて3点以上で結合するため不静定構造になるが、これは例題なので2点で結合した静定構造とする。ヒンジ点が3つ以上になっても荷重のとり方は同じである。

4.1.4.1 解析対象

解析対象を図 4-7 に示す。空気力は舵面に分布しているが、空気力の合力が点 E に負荷されるとする。アクチュエータ A-B で空気力による発生するヒンジモーメントを支持する。残りの力をヒンジ点 C, D で支持する。

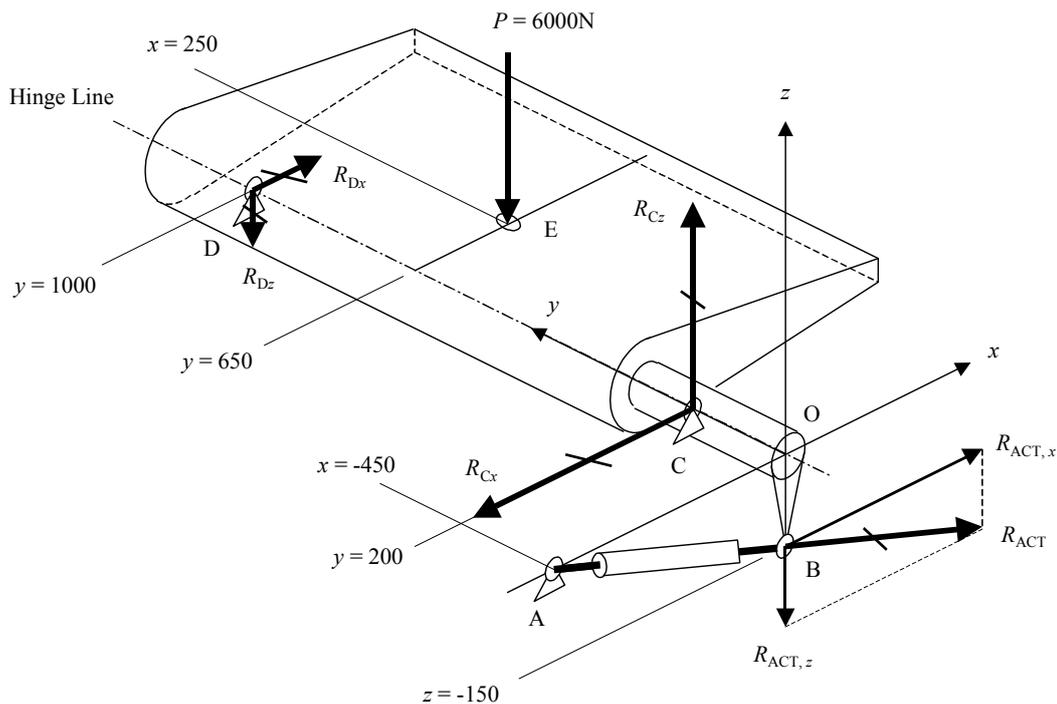


図 4-7 舵面構造

4.1.4.2 力の釣り合い

釣り合い式は以下ようになる。

x 方向	$R_{ACT,x} - R_{Cx} + R_{Dx} = 0$
z 方向	$-R_{ACT,z} + R_{Cz} - R_{Dz} - 6000 = 0$
x 軸まわり	$R_{Cz} \times 200 - R_{Dz} \times 1000 = 0$
y 軸まわり	$R_{ACT,x} \times 150 - 6000 \times 250 = 0$
z 軸まわり	$R_{Cx} \times 200 - R_{Dx} \times 1000 = 0$
アクチュエータ荷重の方向	$R_{ACT,x} = \frac{450}{150} R_{ACT,z}$

未知数（反力）が6個で，方程式が6個であるので，釣り合い式だけですべての反力が決まる静定構造であることがわかる。

この連立方程式を解くと次の解が得られる。

$$R_{ACT,x} = 10000N, \quad R_{ACT,z} = 3333.3N$$

$$R_{Cx} = 12500N, \quad R_{Cz} = 10000N$$

$$R_{Dx} = 2500N, \quad R_{Dz} = 666.7N$$

ヒンジ点が増えると不静定構造となり，構造の剛性を考慮しないと反力を求めることができない。

4.2 トラス構造の解析

トラス (Truss) 構造は、軸力だけを受け持つ棒要素が組み合わさってできた構造である。トラス構造が安定であるためには三角形を組み合わせた形状になっていなければならない。

トラス構造では、棒要素どうしの結合は回転可能なピン結合 (Pin Joint) とみなす。実際のトラス構造で棒要素が剛に結合されていたとしても、伝達される曲げモーメントが小さい場合は、解析上はピン結合としてよい (図 4-8)。トラス構造では、外部荷重は結合点にしか負荷できない。

トラス構造の内部荷重解析とは、トラスを構成する棒要素の軸力を求めることである。静定トラスであれば力の釣り合いからだけで棒要素の軸力を計算できる。しかし、部材が余分にある不静定トラスの場合には、各棒要素の剛性を考慮して変形を計算しないと各棒要素の軸力が決まらない。

見た目にはトラス構造となっていないなくても、トラス構造とみなすと荷重の伝わり方が理解しやすくなる場合があるので、トラス構造をしっかりと理解しておくことは重要である。また、内部荷重を計算する各種の方法を理解するのに役立つので、トラス構造の解析方法を以下にくわしく説明する。

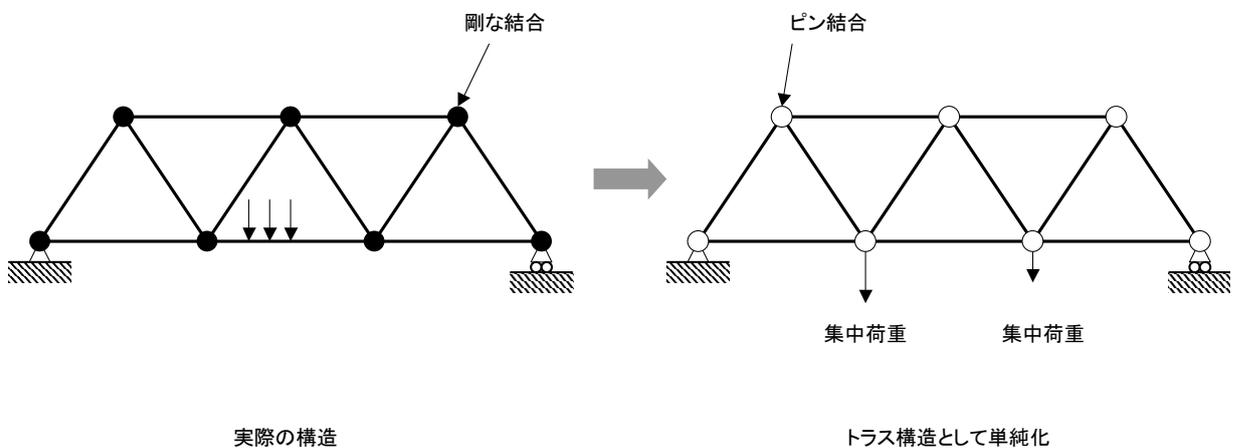


図 4-8 トラス構造としての単純化

4.2.1 静定2次元トラスの解析

2次元トラスは、棒要素が同じ平面内にあるトラスである。上で述べたように、静定トラスは力の釣り合い方程式を解くことによって棒要素の軸力を計算できる。もうひとつのトラスの解き方は、最小ポテンシャル・エネルギーの原理を使ったものである。もちろん、有限要素法を使ってトラス構造を解析することが可能である。

- 力の釣り合いによる静定トラスの解析の例 (4.2.1.1 項)
- 最小ポテンシャル・エネルギーの原理による静定トラスの解析の例 (4.2.1.2 項)

4.2.1.1 力の釣り合い式による静定トラスの解析

ここでは、Bruhn の本の例題、図 A2-18 を解いてみる。図 4-9 にその例題を示す。数字は結合点 (節点) の識別番号で、丸のなかの数字は軸力部材の識別番号である。

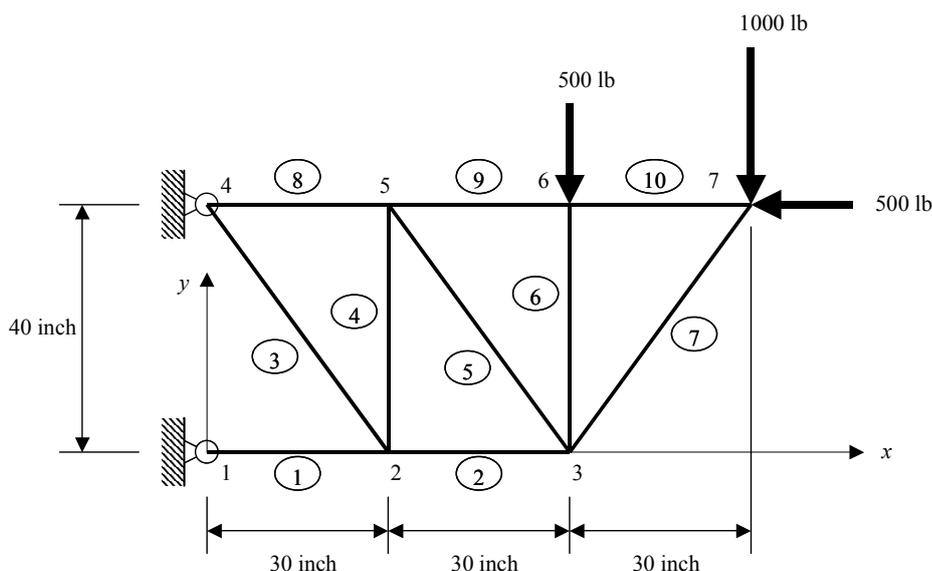


図 4-9 静定トラス構造の例題

(1) 定義

部材 i の内部荷重（軸力, P_i ）が引張であるとき、軸力が正（positive）であるとする。各結合点でのフリーボディ・ダイアグラムを考える。結合点の近くで部材を切断すれば、結合点にはたらく部材の引張荷重は結合点から外に向かう力になり、部材の圧縮荷重は結合点に向かう力になる。フリーボディ・ダイアグラムを図 4-10 に示す。この図では、軸力は引張であるとして描いているので、計算の結果が負となったらそれは圧縮荷重である。支持点反力（Reaction）を R で表し、座標軸の向きを正とした。支持点 1 では上下方向の反力が生じないことに注意すること。

(2) 結合点での力の釣り合い

まず、点 7 での力の釣り合い式を解くと、部材 7 と部材 10 の軸力が決まる。点 7 に部材から働く力の釣り合いは次の式になる。

$$x \text{ 方向の力の釣り合い: } -\frac{3}{5}P_7 - P_{10} - 500 = 0$$

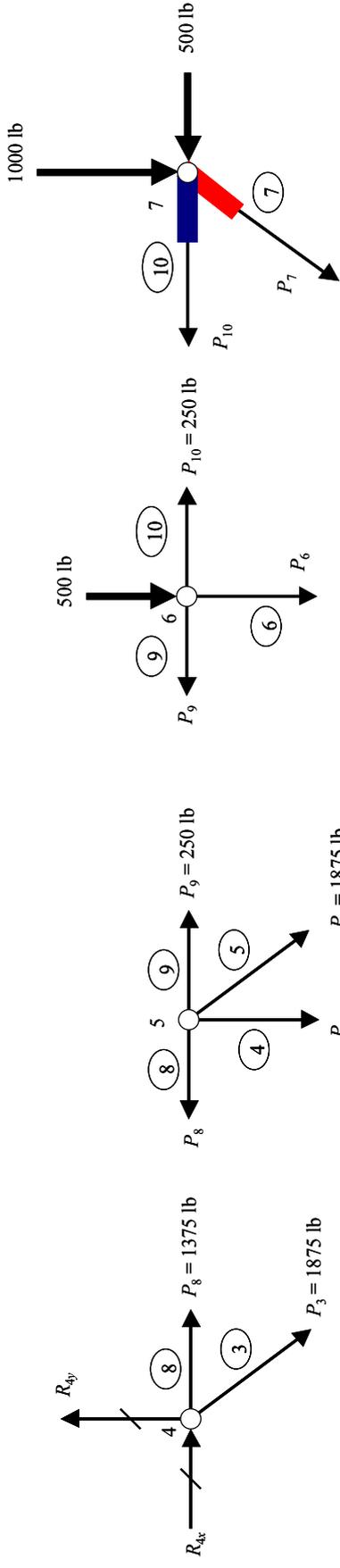
$$y \text{ 方向の力の釣り合い: } -\frac{4}{5}P_7 - 1000 = 0$$

これらの式を解くと、

$$P_7 = \frac{5}{4} \times 1000 = -1250 \text{ (lb)}$$

$$P_{10} = -\frac{3}{5}P_7 - 500 = \frac{3}{5} \times 1250 - 500 = 250 \text{ (lb)}$$

同じように、点 6、点 3、点 5、点 2、点 4、点 1 での力の釣り合い式を順に解いていくと、すべての部材の軸力が決まる。結果を図 4-11 に示す。



点1のフリーボディーダイヤグラム

点2のフリーボディーダイヤグラム

点3のフリーボディーダイヤグラム

点4のフリーボディーダイヤグラム

点5のフリーボディーダイヤグラム

点6のフリーボディーダイヤグラム

点7のフリーボディーダイヤグラム

図 4-10 トラス構造のフリーボディー・ダイヤグラム

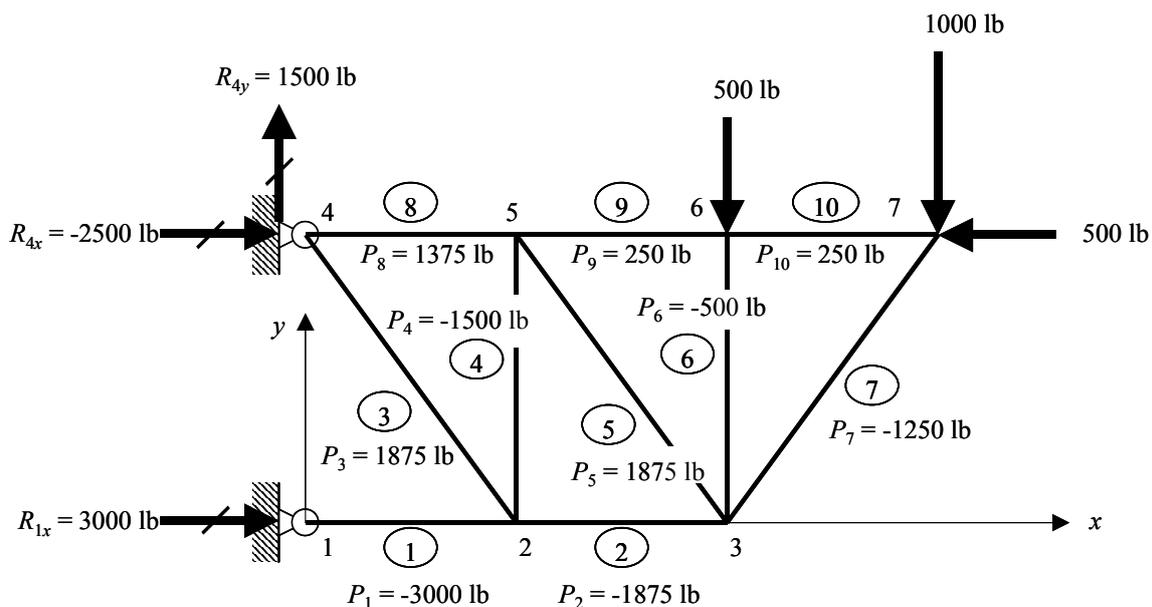


図 4-11 静定トラス構造の例題の解析結果

(3) 釣り合い式の別の解き方

前項で使った釣り合い方程式をまとめると、下の13個の式になる。この連立方程式をMS-Excelの「ソルバー」を使って解くと、簡単に答えが得られる(表 4-1)。わざわざ連立方程式を書かなくても各節点の釣り合いを考えれば、表 4-1 の係数を直接書き下すことができる。この方法は、外力が変わっても同じ表を使って簡単に計算をやりなおすことができる利点がある。

$$\begin{aligned}
 -\frac{3}{5}P_7 - P_{10} - 500 &= 0, & -\frac{4}{5}P_7 - 1000 &= 0 \\
 -P_9 + P_{10} &= 0, & -P_6 - 500 &= 0 \\
 -P_2 - \frac{3}{5}P_5 + \frac{3}{5}P_7 &= 0, & \frac{4}{5}P_5 + P_6 + \frac{4}{5}P_7 &= 0 \\
 \frac{3}{5}P_5 - P_8 + P_9 &= 0, & -\frac{4}{5}P_5 - P_4 &= 0 \\
 -P_1 + P_2 - \frac{3}{5}P_3 &= 0, & \frac{4}{5}P_3 + P_4 &= 0 \\
 R_{4x} + \frac{3}{5}P_3 + P_8 &= 0, & R_{4y} - \frac{4}{5}P_3 &= 0 \\
 R_{1x} + P_1 &= 0
 \end{aligned}$$

表 4-1 MS-Excel の「ソルバー」を使った釣り合い式の解法

"solver"を使った連立方程式の解法

軸力										反力		
P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	R1x	R4x	R4y
(lb)	(lb)	(lb)	(lb)	(lb)	(lb)	(lb)	(lb)	(lb)	(lb)	(lb)	(lb)	(lb)
-3000	-1875	1875	-1500	1875	-500	-1250	1375	250	250	3000	-2500	1500

←変化させるセル

節点-方向	係数													外力 (lb)	右辺と左辺の 誤差	誤差の2乗
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	R1x	R4x	R4y			
7-x							-0.6			-1				-500	9.54E-11	9.10E-21
7-y							-0.8							-1000	-5.50E-11	3.03E-21
6-x									-1	1				0	1.11E-11	1.23E-22
6-y						-1								-500	-9.79E-11	9.59E-21
3-x		-1	-0.6				0.6							0	5.41E-11	2.93E-21
3-y					0.8	1	0.8							0	5.89E-11	3.47E-21
5-x					0.6			-1	1					0	-1.16E-10	1.35E-20
5-y				-1	-0.8									0	-6.14E-12	3.77E-23
2-x	-1	1	-0.6											0	-7.87E-11	6.19E-21
2-y			0.8	1										0	-6.64E-11	4.41E-21
7-x			0.6					1				1		0	7.82E-11	6.12E-21
7-y			-0.8										1	0	1.86E-11	3.48E-22
1-x	1												1	0	-1.14E-10	1.29E-20
															合計	7.17E-20

↑
目的セル

4.2.1.2 最小ポテンシャル・エネルギーの原理による静定トラスの解析

図 4-9 の例題を最小ポテンシャル・エネルギーの原理を使って解いてみる。

(1) 計算手順

- ① 各節点での変位を仮定する。
- ② 仮定した変位から部材の変形後の長さを計算し、部材の伸び ΔL_i を計算する。
- ③ 部材 i の伸びから各部材の歪エネルギーが計算できる。 A_i は断面積、 E_i はヤング率である。静定トラスなので、断面積とヤング率が変わってもトラスの軸力は変わらない。

$$U_{\text{internal}} = \sum_i \left(\frac{A_i E_i}{2L_i} \Delta L_i^2 \right)$$

- ④ 一方、外力が働く点の変位 u_j も仮定されているので、外力 F_j によるポテンシャル・エネルギーも計算できる。

$$U_{\text{external}} = - \sum_j (u_j F_j)$$

- ⑤ 全ポテンシャルエネルギーを計算する。

$$U = U_i + U_e$$

- ⑥ 支持されていない点の変位を変数として、全ポテンシャル・エネルギーを最小化すると、変位の解が得られる。最小化を実行するには MS-Excel の「ソルバー」を使う。

- ⑦ 得られた変位から各部材の歪が得られる。

- ⑧ 各部材の歪から軸力 P_i を計算する。

$$P_i = A_i E_i \frac{\Delta L_i}{L_i}$$

⑨ 支持点に集まる部材の軸力から、支持点の反力を計算する。

(2) 計算結果

表 4-2 に計算結果を示す。一番下の行が求められた軸力である。得られた軸力が釣り合い方程式から求めた解と完全には一致しないのは、変形後に荷重の向きが変わること（幾何学的非線形）を考慮した計算になっているためである。

この方法の利点は、①外力が変わっても表の入力値を変えるだけで結果がすぐ出せること、②変位も計算されること、③幾何学的非線形の効果を含めた解が得られること、の3点である

表 4-2 最小ポテンシャル・エネルギーの原理による静定トラスの解法

節点番号	節点座標		拘束条件		変位		変形後の節点座標		外力		外力によるポテンシャルエネルギー U (inch-lb)	
	x (inch)	y (inch)	x (inch)	y (inch)	u (inch)	v (inch)	x (inch)	y (inch)	Px (lb)	Py (lb)		
1	0	0	1	1	0	0	0	0			0	
2	30	0			-0.0009	-0.001847	29.9991	-0.001847			0	
3	60	0			-0.001463	-0.005025	59.998537	-0.005025			0	
4	0	40	1	1	0	0	0	40			0	
5	30	40			0.0004124	-0.002447	30.000412	39.997553			0	
6	60	40			0.0004873	-0.005225	60.000487	39.994775		-500.0	2.612646225	
7	90	40			0.0005623	-0.007325	90.000562	39.992675		-500.0	-1000.0	7.044293945
									合計	①	9.65694017	

変化させるセル

歪エネルギーの合計	(inch-lb)	②	4.82858487
全ポテンシャルエネルギー	(inch-lb)	③=①-②	-4.828355299

↑ 目的セル

要素番号		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
要素節点番号	1	1	2	2	2	3	3	3	4	5	6
	2	2	3	4	5	5	6	7	5	6	7
断面積	A (inch ²)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
ヤング率	E (psi)	10000000	10000000	10000000	10000000	10000000	10000000	10000000	10000000	10000000	10000000
要素節点座標	x1 (inch)	0	30	30	30	60	60	60	0	30	60
	y1 (inch)	0	0	0	0	0	0	0	40	40	40
	x2 (inch)	30	60	0	30	30	60	90	30	60	90
	y2 (inch)	0	0	40	40	40	40	40	40	40	40
長さ	L (inch)	30	30	50	40	50	40	50	30	30	30
変形後の要素節点座標	x1' (inch)	0	29.9991	29.9991	29.9991	59.998537	59.998537	59.998537	0	30.00041244	60.000487
	y1' (inch)	0	-0.001847	-0.001847	-0.001847	-0.005025	-0.005025	-0.005025	40	39.99755302	39.994775
	x2' (inch)	29.9991	59.998537	0	30.000412	30.000412	60.000487	90.000562	30.000412	60.00048735	90.000562
	y2' (inch)	-0.001847	-0.005025	40	39.997553	39.997553	39.994775	39.992675	39.997553	39.99477471	39.992675
長さ	L' (inch)	29.9991	29.999437	50.000938	39.9994	50.000938	39.9998	49.999375	30.000413	30.00007503	30.000075
伸び	ΔL (inch)	-0.0009	-0.000563	0.0009375	-0.0006	0.0009376	-0.0002	-0.000625	0.0004125	7.50312E-05	7.502E-05
歪	ε	-3E-05	-1.88E-05	1.875E-05	-1.5E-05	1.875E-05	-5E-06	-1.25E-05	1.375E-05	2.50104E-06	2.501E-06
歪エネルギー	U (inch-lb)	1.3500987	0.5273962	0.8789448	0.4500509	0.8790336	0.0499988	0.3906455	0.2836525	0.009382814	0.0093811
軸力	P (lb)	-3000.1	-1875.1	1875.0	-1500.1	1875.1	-500.0	-1250.0	1375.1	250.1	250.1

4.2.2 不静定2次元トラスの解析

不静定トラスは力の釣り合い方程式だけでは解けない。ここでは、最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理を使う方法と最小ポテンシャル・エネルギーを使う方法を説明する。有限要素法は不静定トラスの解析にも適用できる。

- 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理による不静定トラスの解析の例 (4.2.2.1)
- 最小ポテンシャル・エネルギーの原理による不静定トラスの解析の例 (4.2.2.2)

最小ポテンシャル・エネルギーの原理を用いる方法は静定であろうが不静定であろうが、同じ手順で解析できるので、ひじょうに便利な方法である。

4.2.2.1 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理による不静定トラスの解析

ここでは、図 4-9 の例題に軸力部材を 1 本追加した図 4-12 の問題を解いてみる。数字は結合点（節点）の識別番号で、丸のなかの数字は軸力部材の識別番号である。⑪が追加した部材である。すべての部材の断面積とヤング率は等しいものとする。

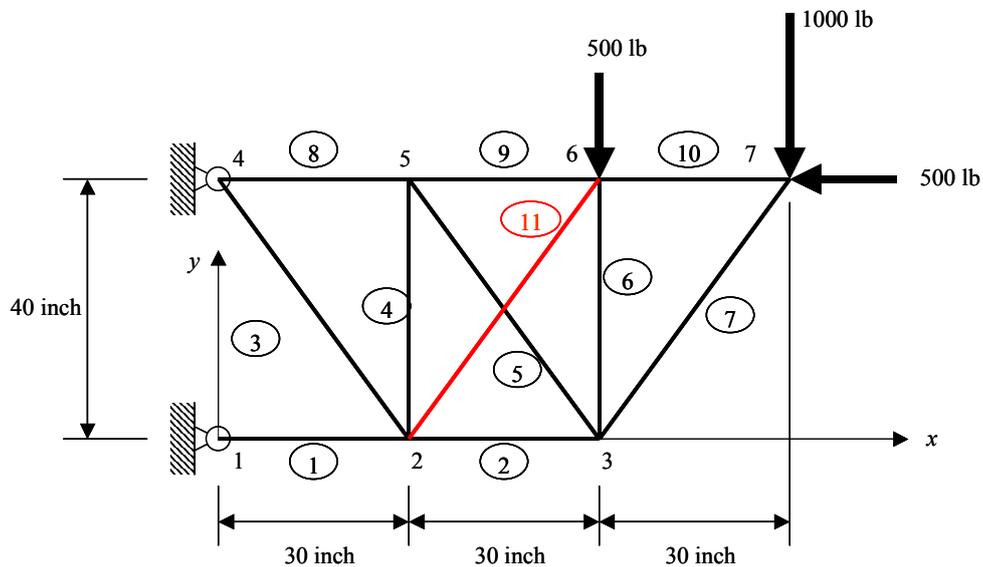


図 4-12 不静定トラスの例題

(1) 力の釣り合い式

点 6 と点 2 以外の点での力の釣り合いは 4.2.1.1 項と同じである。

- 点 6 での力の釣り合い

$$-P_9 + P_{10} - \frac{3}{5}P_{11} = 0$$

$$-P_6 - \frac{4}{5}P_{11} - 500 = 0$$

- 点 2 での力の釣り合い

$$-P_1 + P_2 - \frac{3}{5}P_3 + \frac{3}{5}P_{11} = 0$$

$$\frac{4}{5}P_3 + P_4 + \frac{4}{5}P_{11} = 0$$

● 釣り合い式のまとめ

釣り合い式をまとめると以下のようなになる。

$$-\frac{3}{5}P_7 - P_{10} - 500 = 0, \quad -\frac{4}{5}P_7 - 1000 = 0$$

$$-P_9 + P_{10} - \frac{3}{5}P_{11} = 0, \quad -P_6 - \frac{4}{5}P_{11} - 500 = 0$$

$$-P_2 - \frac{3}{5}P_5 + \frac{3}{5}P_7 = 0, \quad \frac{4}{5}P_5 + P_6 + \frac{4}{5}P_7 = 0$$

$$\frac{3}{5}P_5 - P_8 + P_9 = 0, \quad -\frac{4}{5}P_5 - P_4 = 0$$

$$-P_1 + P_2 - \frac{3}{5}P_3 + \frac{3}{5}P_{11} = 0, \quad \frac{4}{5}P_3 + P_4 + \frac{4}{5}P_{11} = 0$$

$$R_{4x} + \frac{3}{5}P_3 + P_8 = 0, \quad R_{4y} - \frac{4}{5}P_3 = 0$$

$$R_{1x} + P_1 = 0$$

(2) 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理の適用

部材 11 の軸力 P_{11} を変数としてその他の部材の軸力をあらわすと次のようになる。

$$P_1 = -3000$$

$$P_2 = -\frac{3}{5}P_{11} - 1875$$

$$P_3 = 1875$$

$$P_4 = -\frac{4}{5}P_{11} - 1500$$

$$P_5 = P_{11} + 1875$$

$$P_6 = -\frac{4}{5}P_{11} - 500$$

$$P_7 = -1250$$

$$P_8 = 1375$$

$$P_9 = -\frac{3}{5}P_{11} + 250$$

$$P_{10} = 250$$

全コンプリメンタリ・エネルギー U_c は次の式で表される。

$$U_c = \sum_i \frac{L_i}{2A_i E_i} P_i^2$$

この式を計算し、 P_{11} で微分して U_c が最小になる P_{11} を求めるのが普通の教科書に載っているやり方である。

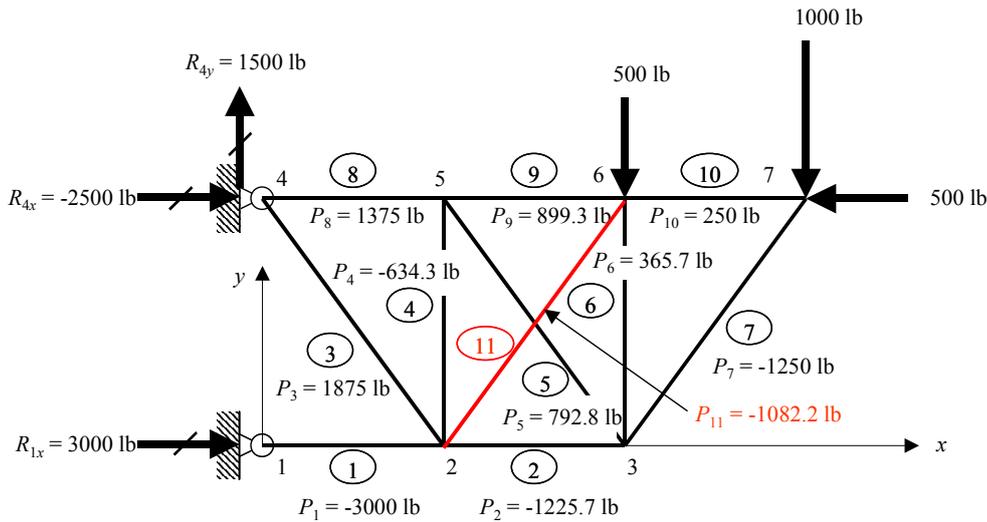


図 4-13 不静定トラスの例題の解析結果

4.2.2.2 最小ポテンシャル・エネルギーの原理による不静定トラスの解析

最小ポテンシャル・エネルギーの原理による不静定トラスの解析方法は、静定トラスの場合とまったく同じである。計算結果を表 4-4 に示す。この方法は、不静定になっても面倒な計算が増えるわけではないので、ひじょうに有用な方法である。

表 4-4 最小ポテンシャル・エネルギーの原理による不静定トラスの解法

節点番号	節点座標		拘束条件		変位		変形後の節点座標		外力		外力によるポテンシャル・エネルギー U (inch-lb)	
	x (inch)	y (inch)	x (inch)	y (inch)	u (inch)	v (inch)	x (inch)	y (inch)	Px (lb)	Py (lb)		
1	0	0	1	1	0	0	0	0			0	
2	30	0			-0.0009	-0.00185	29.9991	-0.00185			0	
3	60	0			-0.00127	-0.00386	59.9987	-0.00386			0	
4	0	40	1	1	0	0	0	40			0	
5	30	40			0.000412	-0.0021	30.0004	39.9979			0	
6	60	40			0.000682	-0.00371	60.0007	39.9963		-500.0	1.855064876	
7	90	40			0.000757	-0.00616	90.0008	39.9938		-500.0	-1000.0	5.777967441
合計										①	7.633032317	

変化させるセル

歪エネルギーの合計 (inch-lb)	②	3.816591623
全ポテンシャル・エネルギー (inch-lb)	③=①-②	-3.816440695

↑ 目的セル

要素番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
要素節点番号	1	2	2	2	3	3	3	4	5	6	2
断面積 A (inch ²)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
ヤング率 E (psi)	10000000	10000000	10000000	10000000	1E+07	1E+07	10000000	10000000	10000000	10000000	10000000
要素節点座標											
x1 (inch)	0	30	30	30	60	60	60	0	30	60	30
y1 (inch)	0	0	0	0	0	0	0	0	40	40	0
x2 (inch)	30	60	0	30	30	60	90	30	60	90	60
y2 (inch)	0	0	40	40	40	40	40	40	40	40	40
長さ L (inch)	30	30	50	40	50	40	50	30	30	30	50
変形後の要素節点座標											
x1' (inch)	0	29.9991	29.9991	29.9991	59.9987	59.9987	59.99873	0	30.00041246	60.00068	29.9991
y1' (inch)	0	-0.00185	-0.00185	-0.00185	-0.00386	-0.00386	-0.00386	40	39.99789934	39.99629	-0.00185
x2' (inch)	29.9991	59.99873	0	30.00041	30.0004	60.0007	90.00076	30.00041	60.00068224	90.00076	60.00068
y2' (inch)	-0.00185	-0.00386	40	39.9979	39.9979	39.9963	39.99384	39.9979	39.99628987	39.99384	39.99629
長さ L (inch)	29.9991	29.99963	50.00094	39.99975	50.0004	40.0001	49.99937	30.00041	30.00026982	30.00008	49.99946
伸び ΔL (inch)	-0.0009	-0.00037	0.000938	-0.00025	0.0004	0.00015	-0.00063	0.000413	0.000269825	7.5E-05	-0.00054
歪 ε	-3E-05	-1.2E-05	1.88E-05	-6.3E-06	7.9E-06	3.7E-06	-1.3E-05	1.38E-05	8.99416E-06	2.5E-06	-1.1E-05
歪エネルギー U (inch-lb)	1.350091	0.225367	0.878964	0.080458	0.15716	0.02676	0.390646	0.283644	0.121342248	0.009381	0.292787
軸力 P (lb)	-3000.1	-1225.7	1875.1	-634.3	792.9	365.8	-1250.0	1375.1	899.4	250.1	-1082.2

4.2.3 3次元トラスの解析

3次元トラスの解析は、変数が多くなるだけで、上で述べた2次元トラスの解析とほとんど同じである。しかし、3次元静定トラスを釣り合い式を使って解くのはひじょうに面倒である。同様に、最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理を用いた3次元不静定トラスの解析は、釣り合い式を書くのがひじょうに面倒になり実用的ではないので、例は示さない。したがって、3次元トラスを解くには最小ポテンシャル・エネルギーの原理を使うことを推奨する。最小ポテンシャル・エネルギーの原理を使えば、静定であろうが不静定であろうが同じ手順で解くことができる。解析例を以下に示す。この例題は Bruhn の本の p.A2.31 に載っている練習問題である。

荷重負荷点 D の変位 (u, v, w) を変数として、4.2.1.2 項とまったく同じ手順で解くことができる。最小ポテンシャル・エネルギーの原理を使う利点がわかってもらえると思う。

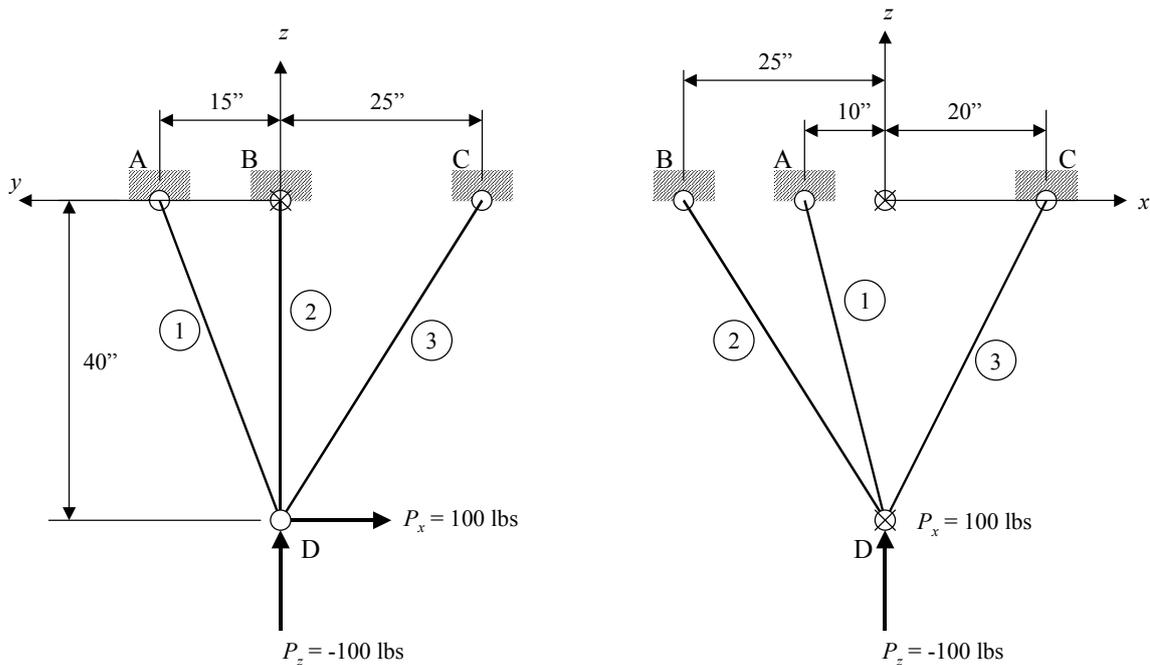


図 4-14 3次元静定トラスの例題

表 4-5 3次元静定トラスの例題の解 - 最小ポテンシャル・エネルギー原理の適用

節点番号	節点座標			拘束条件			変位			変形後の節点座標			外力			外力によるポテンシャルエネルギー
	x (inch)	y (inch)	z (inch)	x (inch)	y (inch)	z (inch)	u (inch)	v (inch)	w (inch)	x (inch)	y (inch)	z (inch)	Px (lb)	Py (lb)	Pz (lb)	
A	-10	15	0	1	1	1	0	0	0	-10	15	0				0
B	-25	0	0	1	1	1	0	0	0	-25	0	0				0
C	20	-25	0	1	1	1	0	0	0	20	-25	0				0
D	0	0	-40				0.00019	0.00014	1.3E-05	0.00019	0.00014	-40	100.0	0.0	-100.0	0.017257202
													合計	①	0.017257202	

変化させるセル

歪エネルギーの合計	(inch-lb)	②	0.008628561
全ポテンシャルエネルギー	(inch-lb)	③=①+②	-0.008628641

↑ 目的セル

要素番号	1	2	3
要素節点番号	A	B	C
	D	D	D
断面積	A (inch ²)	10	10
		10	10
ヤング率	E (psi)	10000000	10000000
		10000000	10000000
要素節点座標	x1 (inch)	-10	-25
		20	
	y1 (inch)	15	0
		-25	
	z1 (inch)	0	0
		0	0
	x2 (inch)	0	0
		0	0
	y2 (inch)	0	0
		0	0
	z2 (inch)	-40	-40
		-40	-40
長さ	L (inch)	43.87482	47.169906
		51.234754	
変形後の要素節点座標	x1' (inch)	-10	-25
		20	
	y1' (inch)	15	0
		-25	
	z1' (inch)	0	0
		0	0
	x2' (inch)	0.000185	0.0001853
		0.0001853	0.0001853
	y2' (inch)	0.00014	0.0001398
		0.0001398	0.0001398
	z2' (inch)	-39.99999	-39.99999
		-39.99999	-39.99999
長さ	L' (inch)	43.8748	47.169993
		51.23474	
伸び	ΔL (inch)	-1.72E-05	8.741E-05
		-1.41E-05	
歪	ϵ	-3.92E-07	1.853E-06
		-2.74E-07	
歪エネルギー	U (inch-lb)	0.000337	0.0080989
		0.000193	
軸力	P (lb)	-39.2	185.3
		-27.4	

4.3 梁理論

梁はトラスの次に基本的な構造である。ほとんどの構造は梁に帰着できる。マクロに見ても梁が出てくるし、ミクロに見ても構造要素としての梁が出てくる。後で出てくるビームカラムも梁の延長上にある。梁の挙動を表す理論を梁理論 (Beam Theory) という。

本書では対称断面の梁だけを扱う。非対称断面の梁であっても、主軸で考えれば対称断面の梁と同じことになるので、主軸の計算が面倒なだけで本質的には同じである。非対称断面の梁の式については、材料力学の教科書を参照してほしい。

4.3.1 梁の内部荷重

梁は細長い構造部材で、長手方向に垂直の向きの荷重 (横荷重 Lateral Load) がはたらくものである。外力は梁の上に分布して負荷されることもあるし、集中荷重として負荷されることもある。

外部荷重がはたらくと、梁には曲げモーメント (Bending Moment) とせん断力 (Shear Force) が発生する。これが梁の内部荷重である。曲げモーメントとせん断力の分布を描いた図が、曲げモーメント線図 (Bending Moment Diagram) とせん断力線図 (Shear Force Diagram) である。

曲げモーメントとせん断力の向きの定義は間違いやすいので、特にここで説明をしておく (図 4-15)。ある断面を切ったときに面が2つできる。面の外向きの法線が座標軸の正の向きにある面にはたらくモーメント (M^+ と表記) とせん断力 (V^+ と表記) の向きが座標軸の正の方向を向いているときにそれらの荷重 $M(x)$ と $V(x)$ を正とする。これは、応力の向きの定義のしかたと同じである。反対側の面にはたらくモーメント (M^- と表記) とせん断力 (V^- と表記) は M^+ 、 V^+ と大きさが同じで、向きが反対である。

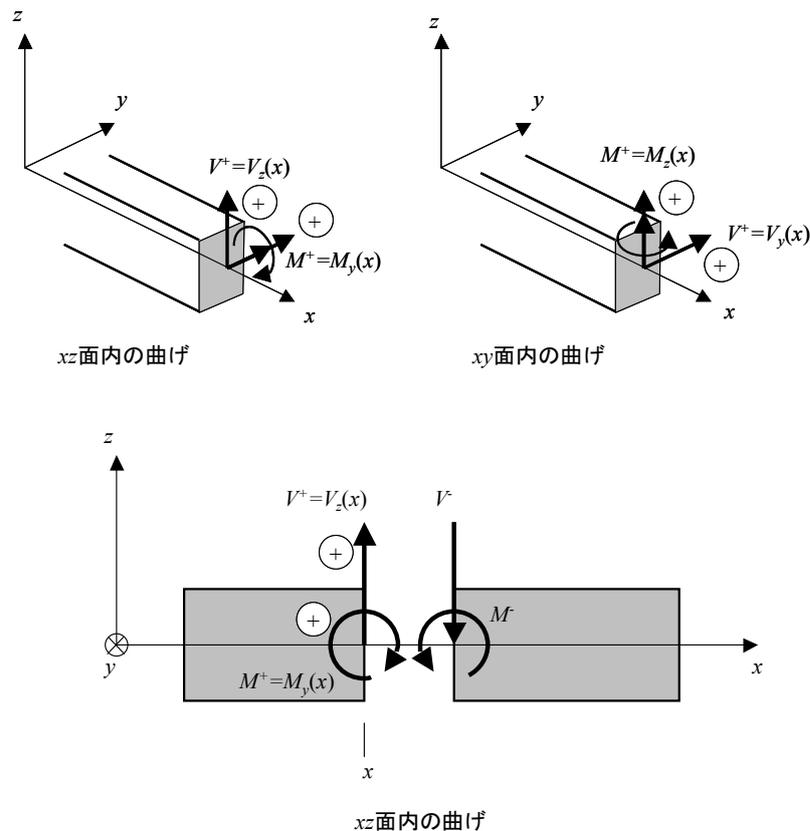


図 4-15 梁の座標系と荷重の向き

xz 面内の曲げを受ける梁の荷重の釣り合い式を以下に示す. 梁の一部 ($x=x$ から $x=x+\Delta x$ の範囲) を取り出す (図 4-16). $x=x$ の面 (x が小さい側の面) にはたらく z 方向の力 (せん断力) を V_z , y 軸まわりの曲げモーメントを M_y とする. $x=x+\Delta x$ の面 (x が大きい側の面) にはたらく z 方向の力 (せん断力) を $V_z(x+\Delta x)$, y 軸まわりの曲げモーメントを $M_y(x+\Delta x)$ とする. 力とモーメントの釣り合いは,

$$-V_z(x) + V_z(x+\Delta x) + p_z(x)\Delta x = 0$$

$$-M_y(x) + M_y(x+\Delta x) - V_z(x)\Delta x + p_z(x)\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

これを書き直して Δx の極限をとると, 次の微分方程式が得られる.

$$\frac{dV_z}{dx} = -p_z(x)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = V_z(x)$$

この式は, 反力を含めた外荷重を積分するとせん断力になり, せん断力をもう一度積分すると曲げモーメントになることを示している.

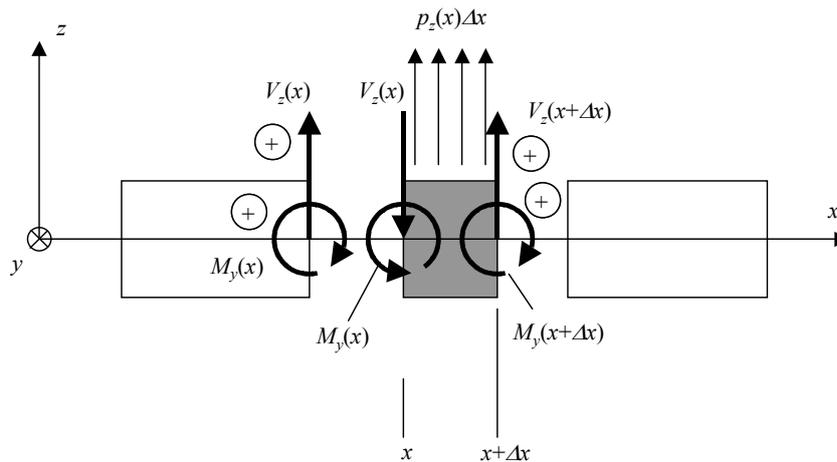


図 4-16 梁の力の釣り合い

4.3.2 梁の方程式

梁の撓み (Deflection) と曲げモーメントの関係を表した式を梁の方程式という. 梁の方程式では梁のせん断変形 (Shear Deflection) を無視している.

梁の軸に垂直な断面は, 変形後も軸に対して垂直を保つとすると, 梁の断面の歪は, 中立軸 (Neutral Axis) の変位 w を使って次のように示すことができる (図 4-17). 中立軸とは, 断面で曲げ歪がゼロとなる線である.

$$\varepsilon_x(\eta) = -\frac{d^2 w}{dx^2} \eta$$

ここで, η : 中立軸からの距離

曲げによって発生する直応力 (Normal Stress) のことを曲げ応力 (Bending Stress) と呼ぶ。曲げ応力が弾性範囲内にある場合には, 曲げ応力が中立軸 (Neutral Axis) からの距離に比例する。曲げモーメントと歪との関係から, 次のように梁の方程式が得られる。

$$M_y(x) = \int_A f_x(\eta) \eta dydz = \int_A E \varepsilon_x(\eta) \eta dydz = - \int_A E \frac{d^2 w}{dx^2} \eta^2 dydz$$

$$= -E \left(\int_A \eta^2 dydz \right) \frac{d^2 w}{dx^2} = -EI_y(x) \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$M_y(x) = -EI_y(x) \frac{d^2 w}{dx^2}$$

ここで, I_y は y 軸まわりの断面 2 次モーメント (Moment of Inertia) で,

$$I_y(x) = \int_A \eta^2 dydz$$

で定義される。

中立軸の位置を基準にして x 方向の応力を合計するとゼロにならなければならないので,

$$P_x(x) = 0 = \int_A f_x(\eta) dydz = \int_A E \varepsilon_x(\eta) dydz = - \int_A E \frac{d^2 w}{dx^2} \eta dydz$$

$$= -E \left(\int_A \eta dydz \right) \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\int_A \eta dydz = 0$$

これが中立軸を決める式である。

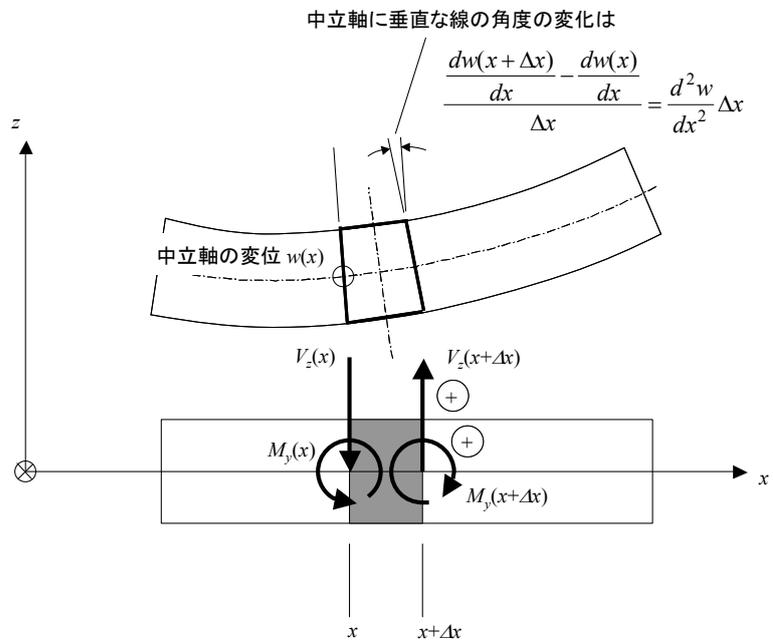


図 4-17 梁の方程式

4.3.3 梁の断面の応力

中立軸から η の距離にある点の曲げ応力は次のようになる。

$$f_x(\eta) = E\varepsilon_x(\eta) = -E \frac{d^2 w}{dx^2} \eta = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} \eta$$

4.3.4 静定梁の解析

梁の内部荷重（せん断力分布と曲げモーメント分布）は、外荷重と反力が決まれば上の微分方程式を積分して求めることができる。静定梁の場合には力の釣り合い式から反力が決まるので、曲げモーメント線図とせん断力線図を描くことは容易である。代表的な静定梁のせん断力図と曲げモーメント図の例を示す（図 4-18, 図 4-19）。

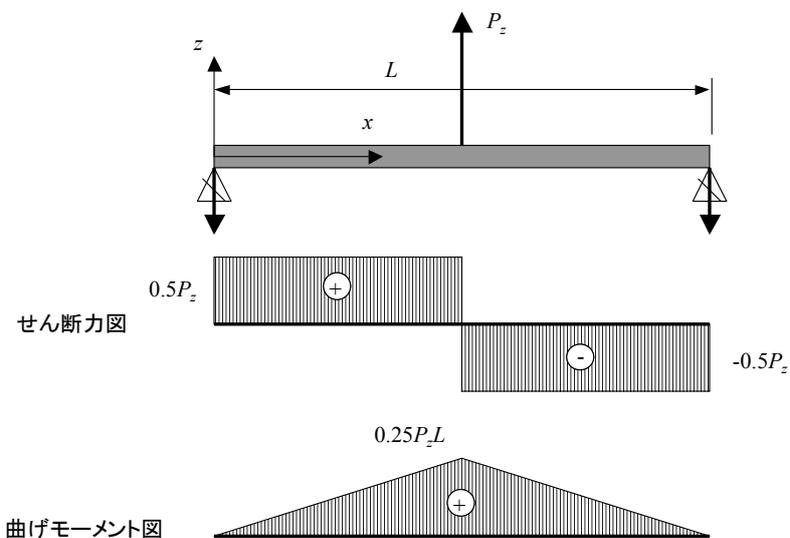


図 4-18 梁の荷重分布 - 両端単純支持梁の中央に集中荷重が負荷される場合

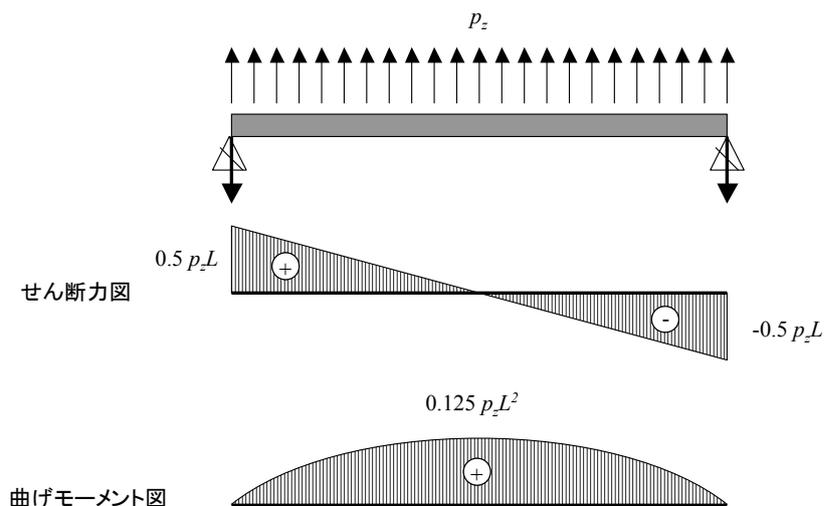


図 4-19 梁の荷重分布 - 両端単純支持梁に一樣分布荷重が負荷される場合

4.3.5 不静定梁の解析

不静定梁では支持点反力が力の釣り合いからだけでは決まらず、梁の剛性も考慮しなければいけない。いったん反力が求まれば、曲げモーメント線図とせん断力線図が描けるので、応力分布を求めることができる。不静定梁を解くには、梁の方程式を使う方法、エネルギー原理を使う方法等があるが、最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理を使って解く方法が有利である。梁の計算では、釣り合い式の変数が少ないため、釣り合い式を簡単に導くことができるからである。以下には、最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理を使う解法を紹介する。

4.3.5.1 梁の最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理

梁のコンプリメンタリ・エネルギーは次のように表される。

$$U_c = \frac{1}{2} \int_L \frac{M^2}{EI} dx$$

この式ではせん断力によるコンプリメンタリ・エネルギーは無視している。

曲げモーメントが線形に変化する長さ L の梁要素ではコンプリメンタリ・エネルギーは次のようになる。

$$M = \frac{M_2 - M_1}{L_i} x + M_1$$

$$U_{ci} = \frac{1}{2} \int_{L_i} \frac{M^2}{E_i I_i} dx = \frac{1}{2E_i I_i} \int_0^{L_i} \left(\frac{M_2 - M_1}{L_i} x + M_1 \right)^2 dx = \frac{L_i}{6E_i I_i} (M_1^2 + M_1 M_2 + M_2^2)$$

全コンプリメンタリ・エネルギー U_c は、

$$U_c = \sum_{\text{all elements}} U_{ci}$$

釣り合い状態にある反力のうち、全コンプリメンタリ・エネルギーを最小にするものが解である。そこで、反力を変数として、釣り合い式を制約条件とし、全コンプリメンタリ・エネルギーを最小にする反力を MS-Excel の「ソルバ」で求めれば不静定梁の問題を解くことができる。

4.3.5.2 解析例

例題として次の2つの問題を解いてみよう。

- 集中荷重が働く両端固定梁：図 4-20, 表 4-6
- 3点支持梁：図 4-21, 表 4-7

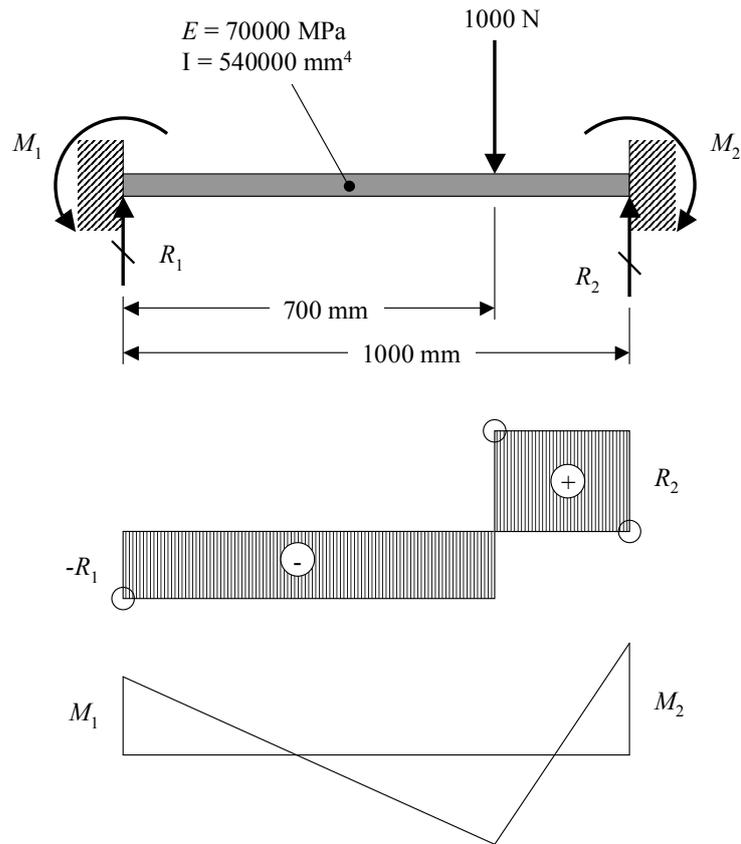


図 4-20 集中荷重がはたらく両端固定梁

表 4-6 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理による解

E	(N/mm ²)	70000
I	(mm ⁴)	540000
x1	(mm)	700
x2	(mm)	1000
P	(N)	1000
R1	(N)	216.0
R2	(N)	784.0
M1	(N-mm)	63000.0
M2	(N-mm)	147000

← 変化させるセル
← 変化させるセル
← 変化させるセル
← 変化させるセル

x (mm)	S (N)	M (N-mm)	Uc (N-mm)
0	-216.0	63000	19.110
700	784.0	-88200	21.723
1000	0.0	147000	--
Sum	--	--	40.833

← 目的セル

釣り合い式

$R_1 + R_2 - P = 0$	0	← 制約条件
$M_1 - P \cdot x_1 + R_2 \cdot x_2 - M_2 = 0$	0	← 制約条件

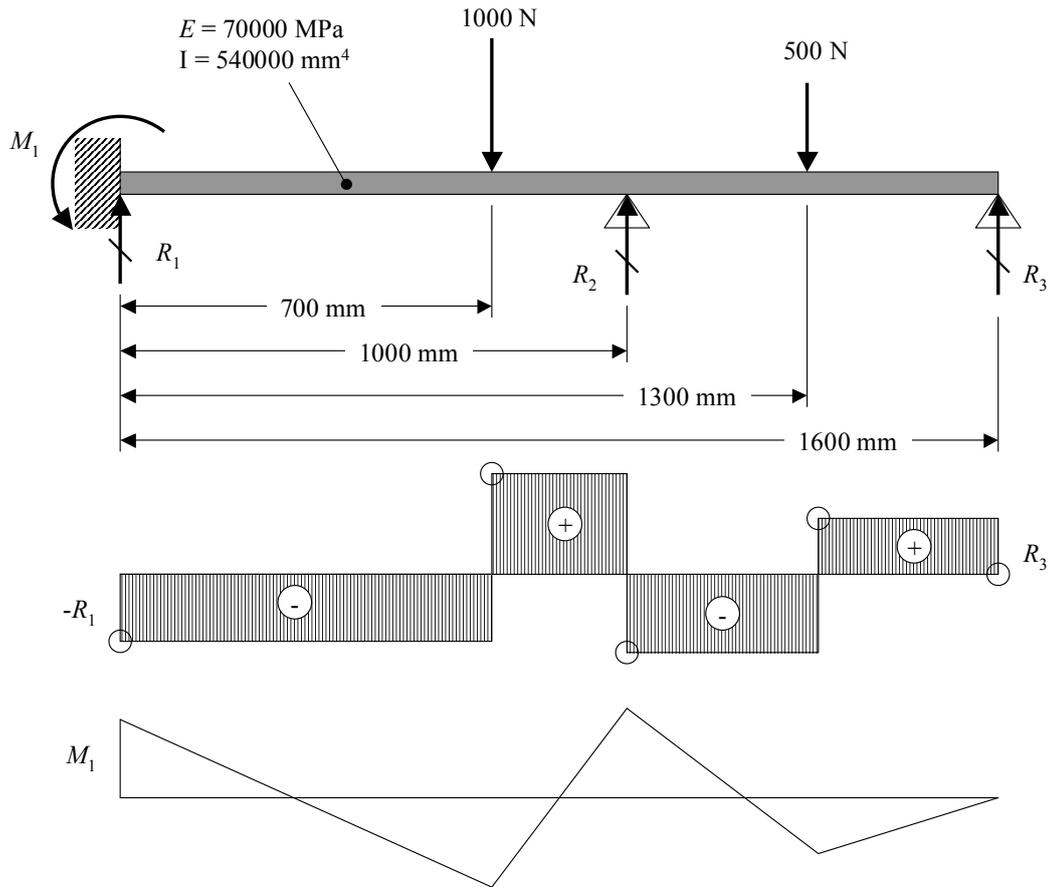


図 4-21 3点支持梁

表 4-7 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理による解

E	(N/mm ²)	70000
I	(mm ⁴)	540000
x1	(mm)	700
x2	(mm)	1000
x3	(mm)	1300
x4	(mm)	1600
P1	(N)	1000
P2	(N)	500
R1	(N)	280.3
R2	(N)	1143.2
R3	(N)	76.5
M1	(N-mm)	84441

← 変化させるセル
← 変化させるセル
← 変化させるセル
← 変化させるセル

x	S	M	Uc
(mm)	(N)	(N-mm)	(N-mm)
0	-280.3	84441.2	31.441
700	719.7	-111785.3	15.473
1000	-423.5	104117.6	11.876
1300	76.5	-22941.2	0.696
1600	0.0	0.0	--
Sum	--	--	58.790

← 目的セル

釣り合い式

$R1+R2+R3-P1-P2=0$	0	← 制約条件
$M1-P*x1+R2*x2-P2*x3+R3*x4=0$	0	← 制約条件

4.3.6 曲がり梁の解析

これまでは直線の梁を考えてきたが、次に曲がった梁を考える。胴体フレームは曲がり梁である。ここでは、曲がり梁の変形は小さく、変形によって曲げモーメントが変化する影響(幾何学的非線形)は考慮しないこととする。

曲がり梁を直線梁の要素の集合と考えて、最小ポテンシャル・エネルギーの原理を使って解析する方法を説明する。そこで、まず直線梁の歪エネルギーの式から説明を始め、梁要素を紹介した後、この梁要素を使った曲がり梁の解析例を示す。

4.3.6.1 梁の歪エネルギー

直線梁の歪エネルギー U は次のように表される。

$$U = \frac{1}{2} \int_L EI(x) \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$$

ここで、

- EI : 梁の曲げ剛性
- x : 梁の長手方向の座標
- v : 梁の横変位

この式ではせん断力による歪エネルギーは無視している。

4.3.6.2 梁要素と歪エネルギー

参考文献[2-4]で紹介した梁要素について説明する。図 4-22 に示す長さ L_e の梁要素に軸力、せん断力、曲げモーメントが働くとする。節点力の方向の定義は有限要素法と同じように節点 1 と節点 2 で同じ向きにとり、図 4-22 の方向を正とする。要素のヤング率を E_e 、断面積を A_e 、断面 2 次モーメントを I_e とする。要素内の変位 u_e を次のように 1 次関数で表すと、

$$u_e(x_e) = px_e + q$$

要素の両端における境界条件から、要素内変位を節点変位で表すことができる。

$$\begin{aligned} u_{e1} = q & \quad \rightarrow \quad p = \frac{u_{e2} - u_{e1}}{L_e} \\ u_{e2} = pL_e + q & \quad \quad \quad q = u_{e1} \end{aligned}$$

伸び歪は、

$$\varepsilon_{xe} = \frac{du_e}{dx_e} = p = \frac{u_{e2} - u_{e1}}{L_e}$$

軸力は、

$$\begin{aligned} P_{xe1} &= -E_e A_e \varepsilon_{xe} = -E_e A_e p \\ P_{xe2} &= -P_{xe1} \end{aligned}$$

要素内の変位 v_e を次のように 3 次関数で表すと、

$$v_e(x_e) = ax_e^3 + bx_e^2 + cx_x + d$$

要素の両端における境界条件から、要素内変位を節点変位で表すことができる。

$$\begin{aligned} v_{e1} &= d \\ v_{e2} &= aL_e^3 + bL_e^2 + cL_e + d \\ \theta_{e1} &= \left(\frac{dv_e}{dx_e} \right)_{x_e=0} = c \\ \theta_{e2} &= \left(\frac{dv_e}{dx_e} \right)_{x_e=L_e} = 3aL_e^2 + 2bL_e + c \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} a &= \frac{\theta_{e1} + \theta_{e2}}{L_e^2} - \frac{2(v_{e2} - v_{e1})}{L_e^3} \\ b &= -\frac{2\theta_{e1} + \theta_{e2}}{L_e} + \frac{3(v_{e2} - v_{e1})}{L_e^2} \\ d &= v_{e1} \\ c &= \theta_{e1} \end{aligned}$$

梁の式は次のようになる.

$$E_e I_e \frac{d^2 v_e}{dx_e^2} = M_{ze} \rightarrow M_{ze}(x_e) = E_e I_e (6ax_e + 2b)$$

節点のモーメントは, 節点 1 では符号が逆になることに注意して,

$$M_{ze1} = -2E_e I_e b, \quad M_{ze2} = E_e I_e (6aL_e + 2b)$$

節点 1 のせん断力は, 節点 2 のモーメントの釣り合いより

$$M_{ze1} + M_{ze2} - P_{ye1} L_e = 0 \rightarrow P_{ye1} = \frac{M_{ze1} + M_{ze2}}{L_e}$$

節点 2 のせん断力は,

$$P_{ye2} = -P_{ye1}$$

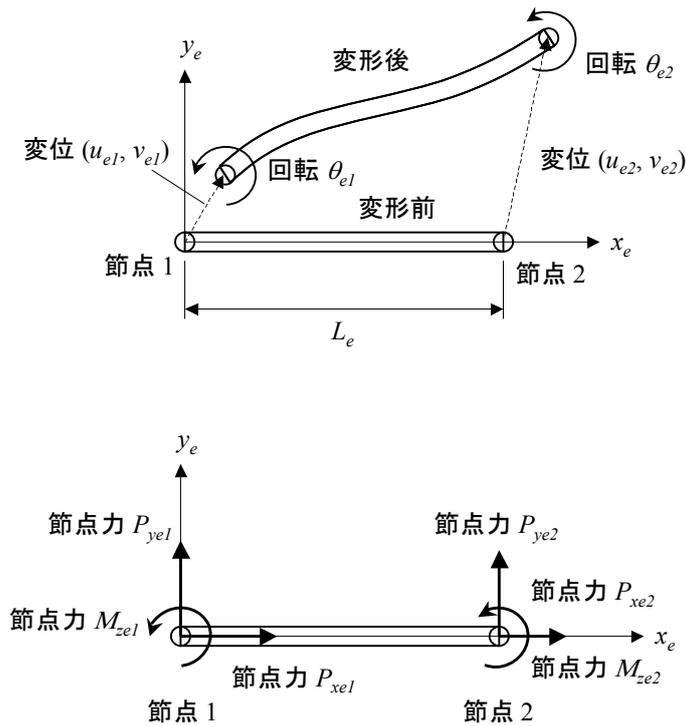


図 4-22 梁要素の変形と荷重

梁要素の歪エネルギーは軸歪による歪エネルギーと曲げ歪による歪エネルギーの和で,

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{L_e} E_e A_e \left(\frac{du_e}{dx_e} \right)^2 dx_e + \frac{1}{2} \int_{L_e} E_e I_e \left(\frac{d^2 v_e}{dx_e^2} \right)^2 dx_e = \frac{E_e A_e L_e p^2}{2} + E_e I_e L_e (6a^2 L_e^2 + 6abL_e + 2b^2)$$

全ポテンシャル・エネルギーは, すべての要素の歪エネルギーの和と外力による仕事から次のように表される.

$$U_{total} = \sum_{\text{全要素}} U_i^e - \sum_{\text{全外力}} (P_x u_x + P_y v_y + M_z \theta)$$

4.3.6.3 門型フレームの解析

Bruhn の本の Fig.A9.7 の例題（門型フレーム，図 4-23 の左の図）を前項で説明した梁要素を使って最小ポテンシャル・エネルギーの原理で解く．図 4-23 の右の図のようにフレームを要素に分割し，節点番号と要素番号をつける．節点の変位を仮定して要素の歪エネルギーと外力による仕事を計算し，全ポテンシャル・エネルギーを計算する．MS-Excel のソルバーを使って，節点変位をパラメータとして全ポテンシャル・エネルギーを最小にすることにより，節点変位を求める（表 4-8）．変形を図 4-24 に，曲げモーメント分布を図 4-25 に示す．

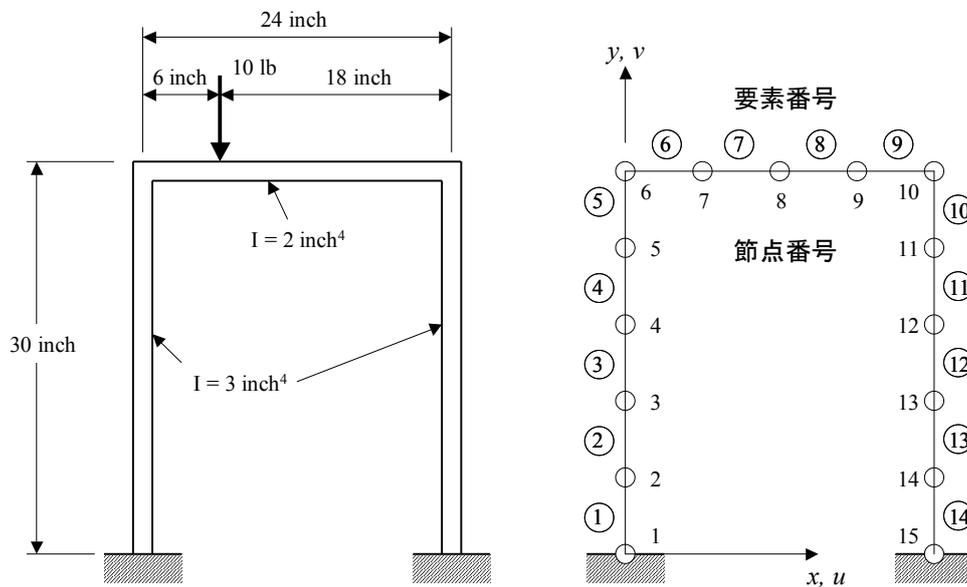


図 4-23 門型フレーム

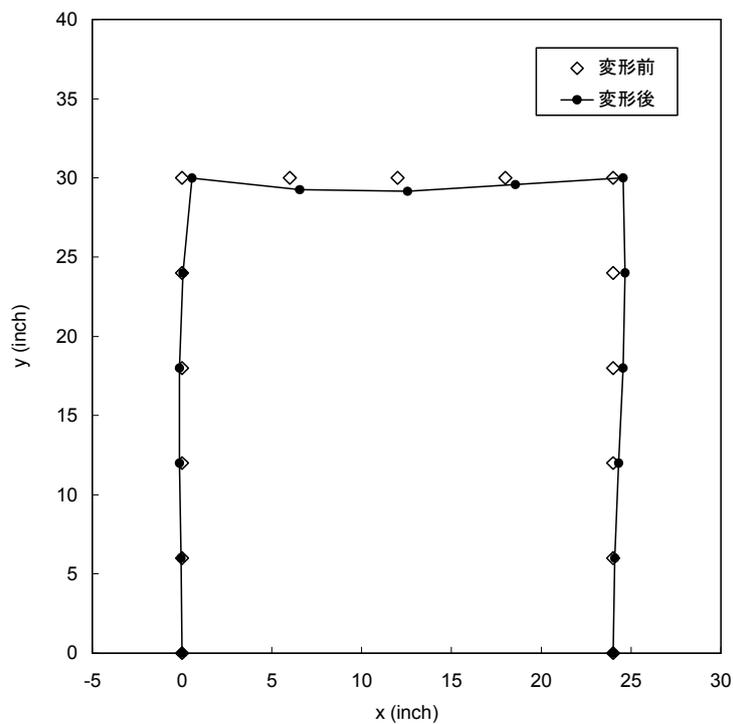


図 4-24 門型フレームの変形

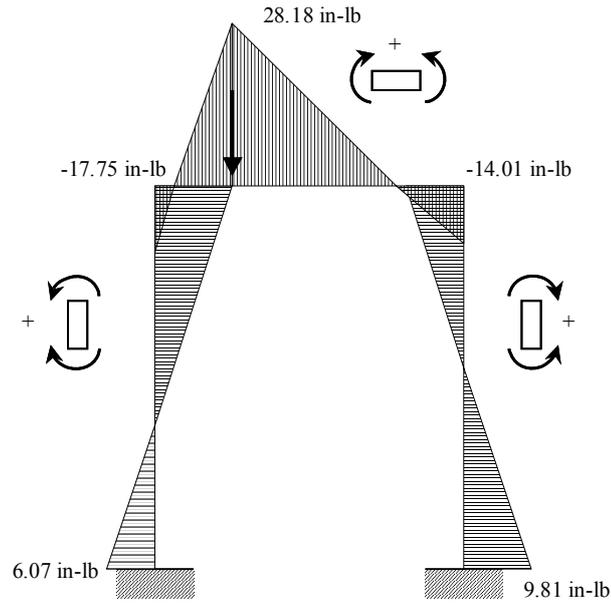


図 4-25 門型フレームの曲げモーメントの分布

表 4-8 門型フレームの解析

Grid No.	x (inch)	y (inch)	Constraint			u (inch)	v (inch)	theta*100 (radian)	x' (inch)	y' (inch)	theta (radian)	Px (lb)	Py (lb)	Mz (in-lb)	W (in-lb)
			x	y	theta										
1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0				0
2	0	6				-0.0269	-0.0005	0.73766056	-0.0269	5.9995	0.0074				0
3	0	12				-0.0695	-0.0009	0.52245162	-0.0695	11.999	0.0052				0
4	0	18				-0.0705	-0.0014	-0.6456268	-0.0705	17.999	-0.0065				0
5	0	24				0.0271	-0.0018	-2.7665745	0.0271	23.998	-0.0277				0
6	0	30				0.2805	-0.0023	-5.8403918	0.2805	29.998	-0.0584				0
7	6	30				0.2805	-0.3747	-4.2755596	6.2805	29.625	-0.0428		-10		3.7468
8	12	30				0.2804	-0.4198	2.06969283	12.28	29.58	0.0207				0
9	18	30				0.2804	-0.2107	4.19536518	18.28	29.789	0.042				0
10	24	30				0.2803	-0.0007	2.10145751	24.28	29.999	0.021				0
11	24	24				0.3319	-0.0006	-0.2245728	24.332	23.999	-0.0022				0
12	24	18				0.2724	-0.0004	-1.597734	24.272	18	-0.016				0
13	24	12				0.1592	-0.0003	-2.0180254	24.159	12	-0.0202				0
14	24	6				0.0493	-0.0001	-1.4854474	24.049	5.9999	-0.0149				0
15	24	0	1	1	1	0	0	0	24	0	0				0
														W_total	3.7468

表 4-8 門型フレームの解析 (つづき)

U_total (in-lb)	1.8734													
Element	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Grid 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Grid 2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
E (psi)	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
A (inch ²)	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
I (inch ⁴)	3	3	3	3	3	2	2	2	2	3	3	3	3	3
x1 (inch)	0	0	0	0	0	0	6	12	18	24	24	24	24	24
y1 (inch)	0	6	12	18	24	30	30	30	30	30	24	18	12	6
x2 (inch)	0	0	0	0	0	6	12	18	24	24	24	24	24	24
y2 (inch)	6	12	18	24	30	30	30	30	30	24	18	12	6	0
Le (inch)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
m	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
n	1	1	1	1	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1
x1' (inch)	0	-0.0269	-0.0695	-0.0705	0.0271	0.2805	6.2805	12.28	18.28	24.28	24.332	24.272	24.159	24.049
y1' (inch)	0	5.9995	11.999	17.999	23.998	29.998	29.625	29.58	29.789	29.999	23.999	18	12	5.9999
x2' (inch)	-0.0269	-0.0695	-0.0705	0.0271	0.2805	6.2805	12.28	18.28	24.28	24.332	24.272	24.159	24.049	24
y2' (inch)	5.9995	11.999	17.999	23.998	29.998	29.625	29.58	29.789	29.999	23.999	18	12	5.9999	0
theta1 (radian)	0	0.0074	0.0052	-0.0065	-0.0277	-0.0584	-0.0428	0.0207	0.042	0.021	-0.0022	-0.016	-0.0202	-0.0149
theta2 (radian)	0.0074	0.0052	-0.0065	-0.0277	-0.0584	-0.0428	0.0207	0.042	0.021	-0.0022	-0.016	-0.0202	-0.0149	0
xe1 (inch)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ye1 (inch)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xe2 (inch)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
ye2 (inch)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1'-x1 (inch)	0	-0.0269	-0.0695	-0.0705	0.0271	0.2805	0.2805	0.2804	0.2804	0.2803	0.3319	0.2724	0.1592	0.0493
y1'-y1 (inch)	0	-0.0005	-0.0009	-0.0014	-0.0018	-0.0023	-0.3747	-0.4198	-0.2107	-0.0007	-0.0006	-0.0004	-0.0003	-0.0001
x2'-x1 (inch)	-0.0269	-0.0695	-0.0705	0.0271	0.2805	6.2805	6.2804	6.2804	6.2803	0.3319	0.2724	0.1592	0.0493	0
y2'-y1 (inch)	5.9995	5.9991	5.9986	5.9982	5.9977	-0.3747	-0.4198	-0.2107	-0.0007	-6.0006	-6.0004	-6.0003	-6.0001	-6
xe1' (inch)	0	-0.0005	-0.0009	-0.0014	-0.0018	0.2805	0.2805	0.2804	0.2804	0.0007	0.0006	0.0004	0.0003	0.0001
ye1' (inch)	0	0.0269	0.0695	0.0705	-0.0271	-0.0023	-0.3747	-0.4198	-0.2107	0.2803	0.3319	0.2724	0.1592	0.0493
xe2' (inch)	5.9995	5.9991	5.9986	5.9982	5.9977	6.2805	6.2804	6.2804	6.2803	6.0006	6.0004	6.0003	6.0001	6
ye2' (inch)	0.0269	0.0695	0.0705	-0.0271	-0.2805	-0.3747	-0.4198	-0.2107	-0.0007	0.3319	0.2724	0.1592	0.0493	0
ue1 (inch)	0	-0.0005	-0.0009	-0.0014	-0.0018	0.2805	0.2805	0.2804	0.2804	0.0007	0.0006	0.0004	0.0003	0.0001
ve1 (inch)	0	0.0269	0.0695	0.0705	-0.0271	-0.0023	-0.3747	-0.4198	-0.2107	0.2803	0.3319	0.2724	0.1592	0.0493
ue2 (inch)	-0.0005	-0.0009	-0.0014	-0.0018	-0.0023	0.2805	0.2804	0.2804	0.2803	0.0006	0.0004	0.0003	0.0001	0
ve2 (inch)	0.0269	0.0695	0.0705	-0.0271	-0.2805	-0.3747	-0.4198	-0.2107	-0.0007	0.3319	0.2724	0.1592	0.0493	0
p	-8E-05	-8E-05	-8E-05	-8E-05	-8E-05	-8E-06	-8E-06	-8E-06	-8E-06	-2E-05	-2E-05	-2E-05	-2E-05	-2E-05
a	-4E-05	-4E-05	-4E-05	-4E-05	-4E-05	0.0006	-0.0002	-0.0002	-0.0002	4E-05	4E-05	4E-05	4E-05	4E-05
b	0.001	0.0002	-0.0006	-0.0014	-0.0022	-0.0044	0.007	0.0035	1E-05	-0.0023	-0.0015	-0.0007	5E-05	0.0008
c	0	0.0074	0.0052	-0.0065	-0.0277	-0.0584	-0.0428	0.0207	0.042	0.021	-0.0022	-0.016	-0.0202	-0.0149
d	0	0.0269	0.0695	0.0705	-0.0271	-0.0023	-0.3747	-0.4198	-0.2107	0.2803	0.3319	0.2724	0.1592	0.0493
U_axial (in-lb)	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	0.0018	2E-05	2E-05	2E-05	2E-05	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
U_bending (in-lb)	0.0155	0.003	0.036	0.1144	0.2381	0.3046	0.6958	0.1	0.0978	0.1372	0.049	0.0063	0.009	0.0571
Mze1 (in-lb)	-6.070	-1.306	3.458	8.223	12.987	17.751	-28.183	-14.118	-0.053	14.012	9.248	4.484	-0.281	-5.045
Mze2 (in-lb)	1.306	-3.458	-8.223	-12.987	-17.751	28.183	14.118	0.053	-14.012	-9.248	-4.484	0.281	5.045	9.809
Pye1 (lb)	-0.794	-0.794	-0.794	-0.794	-0.794	7.656	-2.344	-2.344	-2.344	0.794	0.794	0.794	0.794	0.794
Pye2 (lb)	0.794	0.794	0.794	0.794	0.794	-7.656	2.344	2.344	2.344	-0.794	-0.794	-0.794	-0.794	-0.794
Pxe1 (lb)	7.656	7.656	7.656	7.656	7.656	0.794	0.794	0.794	0.794	2.344	2.344	2.344	2.344	2.344
Pxe2 (lb)	-7.656	-7.656	-7.656	-7.656	-7.656	-0.794	-0.794	-0.794	-0.794	-2.344	-2.344	-2.344	-2.344	-2.344

4.3.6.4 胴体フレームの解析

図 4-26 に示すように、胴体フレームの床ビームにペイロード荷重が働いているときのフレームの内部荷重を求める。図 4-27 の右上の図に示すように要素分割する。左右対称であるので、左舷の片側だけで考えればよい。床荷重はフレームに流れ、外板のせん断流と釣り合う。補強外板のせん断流の求め方は 4.5.4 項に示した。本項では外板のストリングは外板に均一に分布していると簡略化して、外板のせん断流は 4.3.7.5 項の薄肉円筒のせん断流分布を使用する(図 4-28)。外板のせん断流を節点に分配するとき外板とフレームの中立軸のオフセットの影響を考慮する必要がある(図 4-29)。MS-Excel のソルバーを使って、節点変位をパラメータとして全ポテンシャル・エネルギーを最小にすることにより、節点変位を求める(表 4-9)。フレームの断面特性や材料定数は表中の値を用いた。得られた変形と曲げモーメントの分布を図 4-30 に示す。

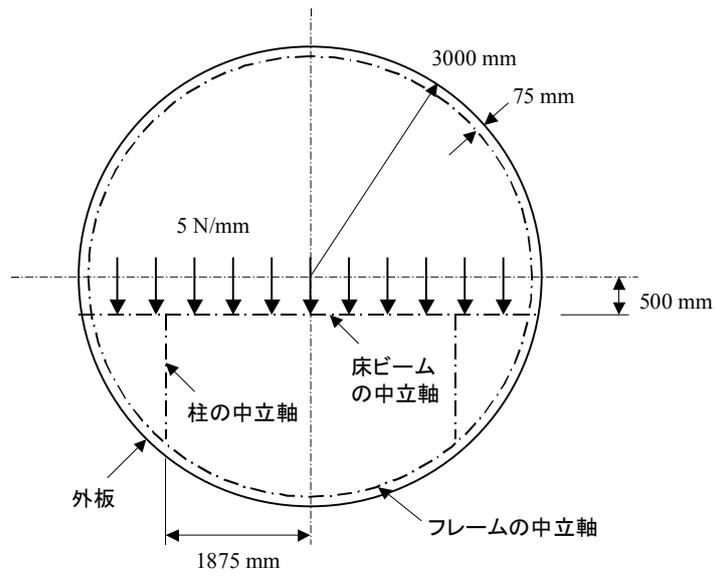


図 4-26 床荷重が負荷される胴体フレーム

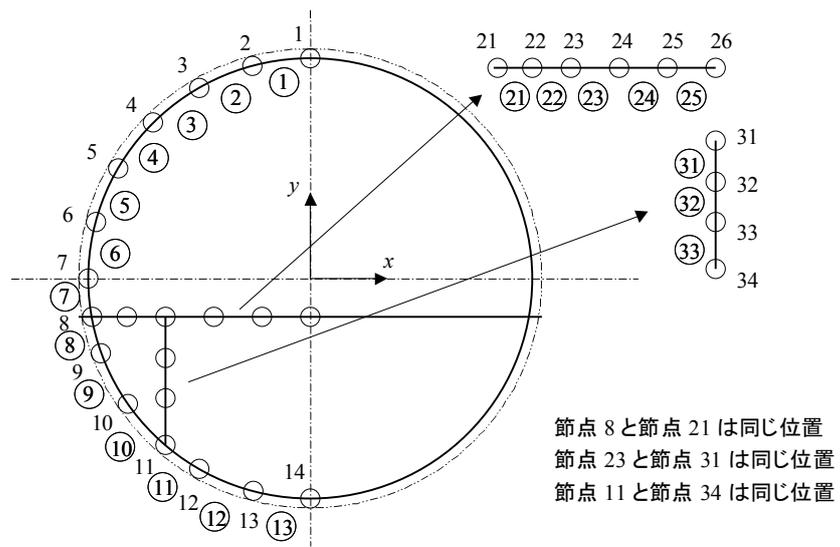


図 4-27 胴体フレームの要素分割

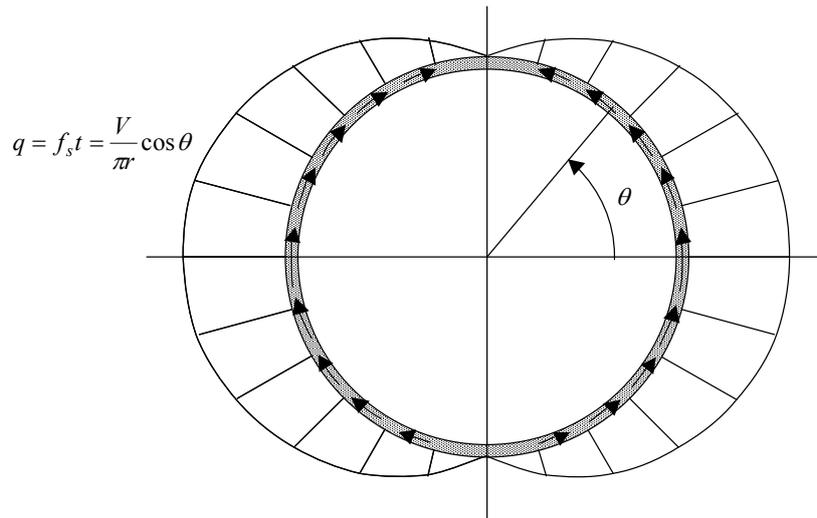


図 4-28 床荷重 V と釣り合う外板せん断流分布

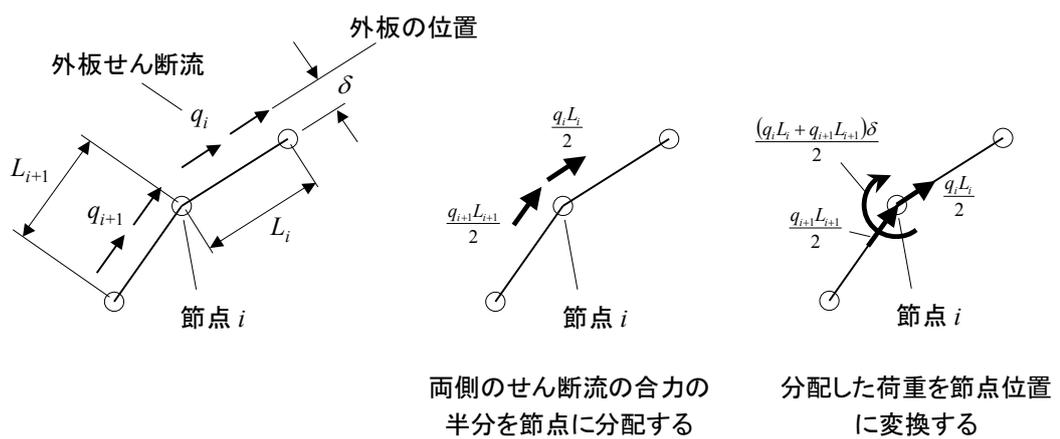


図 4-29 外板せん断力の節点荷重への変換

表 4-9 胴体フレームの解析

U-W -52325.85 (N-mm) ← 目的セル			変化させるセル						変形後の座標			外力			
Grid No.	x (mm)	y (mm)	Constraint			u (mm)	v (mm)	theta*100 (radian)	x' (mm)	y' (mm)	theta (radian)	Px (N)	Py (N)	Mz (N-mm)	W (N-mm)
			x	y	theta										
1	0.0	2925.0	1	1	1	0	0	0	0.0	2925.0	0.0000	155.2	20.4	-11738.7	0.0
2	-757.0	2825.3				0.157	-1.023	0.259	-756.9	2824.3	0.0026	579.1	196.0	-46154.8	-229.7
3	-1462.5	2533.1				1.184	-3.464	0.403	-1461.3	2529.7	0.0040	1003.1	620.0	-89164.2	-1319.9
4	-2068.3	2068.3				3.041	-5.883	0.355	-2065.2	2062.4	0.0036	1158.3	1199.1	-126097.3	-3979.8
5	-2533.1	1462.5				4.570	-7.076	0.119	-2528.6	1455.4	0.0012	1003.1	1778.2	-154437.0	-8183.4
6	-2825.3	757.0				4.293	-7.002	-0.201	-2821.0	750.0	-0.0020	579.1	2202.2	-172252.1	-12586.5
7	-2925.0	0.0				1.934	-6.748	-0.382	-2923.1	-6.7	-0.0038	87.5	1964.8	-148343.0	-12523.3
8	-2881.9	-500.0				0.189	-6.945	-0.278	-2881.8	-506.9	-0.0028	-364.3	1781.0	-137038.6	-12057.5
9	-2685.1	-1160.0				-1.325	-7.506	-0.255	-2686.5	-1167.5	-0.0025	-761.5	1798.2	-147471.7	-12111.7
10	-2343.7	-1750.0				-2.993	-8.610	-0.304	-2346.7	-1758.6	-0.0030	-1000.3	1368.8	-128014.4	-8401.9
11	-1875.0	-2245.0				-3.616	-9.377	0.144	-1878.6	-2254.4	0.0014	-1022.7	884.7	-102092.8	-4745.3
12	-1310.0	-2615.2				-1.818	-6.732	0.663	-1311.8	-2622.0	0.0066	-830.3	443.7	-71061.6	-1948.7
13	-670.0	-2847.2				-0.287	-2.715	0.508	-670.3	-2849.9	0.0051	-464.6	138.5	-36548.2	-428.5
14	0.0	-2925.0	1		1	0	-0.918	0	0.0	-2925.9	0.0000	-121.5	14.1	-9177.0	-12.9
21	-2881.9	-500.0	=G8	=G8	=G8	0.189	-6.945	-0.278	-2881.8	-506.9	-0.0028		-1258.7		8741.6
22	-2378.5	-500.0				0.156	-8.342	-0.296	-2378.3	-508.3	-0.0030		-2517.4		21000.0
23	-1875.0	-500.0				0.122	-10.185	-0.470	-1874.9	-510.2	-0.0047		-2821.2		28732.6
24	-1250.0	-500.0				0.082	-13.767	-0.604	-1249.9	-513.8	-0.0060		-3125.0		43020.9
25	-625.0	-500.0				0.041	-17.006	-0.389	-625.0	-517.0	-0.0039		-3125.0		53143.2
26	0.0	-500.0	1		1	0	-18.267	0	0.0	-518.3	0.0000		-1562.5		28542.5
31	-1875.0	-500.0	=G23	=G23	=G23	0.122	-10.185	-0.470	-1874.9	-510.2	-0.0047				0.0
32	-1875.0	-1081.7				-2.248	-9.915	-0.334	-1877.2	-1091.6	-0.0033				0.0
33	-1875.0	-1663.3				-3.626	-9.646	-0.129	-1878.6	-1673.0	-0.0013				0.0
34	-1875.0	-2245.0	=G11	=G11	=G11	-3.616	-9.377	0.144	-1878.6	-2254.4	0.0014				0.0
														合計	104651.7

表 4-9 胴体フレームの解析 (つづき)

U_total (N-mm)	52325.9									
Element	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Grid 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Grid 2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E (MPa)	70000	70000	70000	70000	70000	70000	70000	70000	70000	70000
A (mm ²)	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200
I (mm ⁴)	4000000	4000000	4000000	4000000	4000000	4000000	4000000	4000000	4000000	4000000
x1 (mm)	0	-757.04571	-1462.5	-2068.2873	-2533.1243	-2825.333	-2925	-2881.9481	-2685.149	-2343.7417
y1 (mm)	2925	2825.33304	2533.12431	2068.28733	1462.5	757.045707	0	-500	-1160	-1750
x2 (mm)	-757.04571	-1462.5	-2068.2873	-2533.1243	-2825.333	-2925	-2881.9481	-2685.149	-2343.7417	-1875
y2 (mm)	2825.33304	2533.12431	2068.28733	1462.5	757.045707	0	-500	-1160	-1750	-2244.9944
Le (mm)	763.578224	763.578224	763.578224	763.578224	763.578224	763.578224	501.850041	688.71613	681.658967	681.717124
m	-0.9914449	-0.9238795	-0.7933533	-0.6087614	-0.3826834	-0.1305262	0.08578633	0.28574785	0.50084767	0.68758969
n	-0.1305262	-0.3826834	-0.6087614	-0.7933533	-0.9238795	-0.9914449	-0.9963136	-0.9583048	-0.8655354	-0.7260995
x1' (mm)	0	-756.88911	-1461.3165	-2065.2465	-2528.5548	-2821.0396	-2923.0658	-2881.7588	-2686.4745	-2346.7349
y1' (mm)	2925	2824.30975	2529.66007	2062.40472	1455.42361	750.04398	-6.7480974	-506.94499	-1167.5056	-1758.6098
x2' (mm)	-756.88911	-1461.3165	-2065.2465	-2528.5548	-2821.0396	-2923.0658	-2881.7588	-2686.4745	-2346.7349	-1878.6159
y2' (mm)	2824.30975	2529.66007	2062.40472	1455.42361	750.04398	-6.7480974	-506.94499	-1167.5056	-1758.6098	-2254.3715
theta1 (radian)	0	0.00259465	0.00402886	0.0035529	0.00118798	-0.0020098	-0.003818	-0.002776	-0.0025457	-0.0030372
theta2 (radian)	0.00259465	0.00402886	0.0035529	0.00118798	-0.0020098	-0.003818	-0.002776	-0.0025457	-0.0030372	0.00144099
xe1 (mm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ye1 (mm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xe2 (mm)	763.578224	763.578224	763.578224	763.578224	763.578224	763.578224	501.850041	688.71613	681.658967	681.717124
ye2 (mm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1'-x1 (mm)	0	0.15660176	1.18350366	3.04088367	4.56952115	4.29344427	1.93416077	0.18930381	-1.3254976	-2.9932725
y1'-y1 (mm)	0	-1.0232895	-3.4642375	-5.882619	-7.0763925	-7.0017272	-6.7480974	-6.9449879	-7.5055779	-8.6098358
x2'-x1 (mm)	-756.88911	-704.27079	-602.74645	-460.26745	-287.91529	-97.732797	43.241178	195.473657	338.414033	465.12581
y2'-y1 (mm)	-100.69025	-295.67297	-470.71959	-612.86373	-712.45602	-763.7938	-506.94499	-667.50558	-598.60984	-504.37148
xe1' (mm)	0	0.24691478	1.16995759	2.81582278	4.78905416	6.38141951	6.88914547	6.7095087	5.83247132	4.1934538
ye1' (mm)	0	1.00532513	3.46883578	5.99360679	6.92970524	5.17062204	1.34813608	-1.8031046	-4.9064164	-8.0934479
xe2' (mm)	763.556529	763.810516	764.746841	766.410556	768.403947	770.016132	508.785667	695.530003	687.611912	686.03957
ye2' (mm)	1.03497575	3.65344537	6.51816816	7.93307968	6.64607027	2.79841722	-0.4071791	-3.4149336	-6.9029996	-9.073035
ue1 (mm)	0	0.24691478	1.16995759	2.81582278	4.78905416	6.38141951	6.88914547	6.7095087	5.83247132	4.1934538
ve1 (mm)	0	1.00532513	3.46883578	5.99360679	6.92970524	5.17062204	1.34813608	-1.8031046	-4.9064164	-8.0934479
ue2 (mm)	-0.0216959	0.23229149	1.16861636	2.8323314	4.82572245	6.43790783	6.93562531	6.81387351	5.95294458	4.32244502
ve2 (mm)	1.03497575	3.65344537	6.51816816	7.93307968	6.64607027	2.79841722	-0.4071791	-3.4149336	-6.9029996	-9.073035
p	-2.841E-05	-1.915E-05	-1.757E-06	2.162E-05	4.8022E-05	7.3978E-05	9.2617E-05	0.00015154	0.00017674	0.00018922
a	-1.993E-10	-5.361E-10	-6.95E-10	-5.816E-10	-1.354E-10	6.6134E-10	1.5937E-09	-1.352E-09	5.9192E-10	2.7492E-09
b	1.9273E-06	1.5532E-06	4.8433E-07	-8.825E-07	-1.939E-06	-1.941E-06	-1.616E-07	1.5635E-06	-9.657E-07	4.7331E-07
c	0	0.00259465	0.00402886	0.0035529	0.00118798	-0.0020098	-0.003818	-0.002776	-0.0025457	-0.0030372
d	0	1.00532513	3.46883578	5.99360679	6.92970524	5.17062204	1.34813608	-1.8031046	-4.9064164	-8.0934479
U_axial (N-mm)	25.8912048	11.7621306	0.09894723	14.9905438	73.9566426	175.514567	180.802574	664.228068	894.259262	1025.098
U_bending (N-mm)	1241.76379	430.87245	131.844632	1088.67013	1878.3448	681.202373	437.678793	261.423805	96.2237955	5124.15223
Mze1 (N-mm)	-1.079E+06	-8.698E+05	-2.712E+05	4.942E+05	1.086E+06	1.087E+06	9.050E+04	-8.755E+05	5.408E+05	-2.651E+05
Mze2 (N-mm)	8.236E+05	1.821E+05	-6.203E+05	-1.240E+06	-1.259E+06	-2.388E+05	1.253E+06	-6.883E+05	1.370E+05	3.414E+06
Pye1 (N)	-334.8	-900.6	-1167.5	-977.0	-227.5	1111.0	2677.4	-2270.7	994.4	4618.6
Pye2 (N)	334.8	900.6	1167.5	977.0	227.5	-1111.0	-2677.4	2270.7	-994.4	-4618.6
Pxe1 (N)	2386.7	1608.7	147.5	-1816.1	-4033.8	-6214.2	-7779.8	-12729.0	-14845.8	-15894.1
Pxe2 (N)	-2386.7	-1608.7	-147.5	1816.1	4033.8	6214.2	7779.8	12729.0	14845.8	15894.1

表 4-9 胴体フレームの解析 (つづき)

Element	11	12	13	21	22	23	24	25	31	32	33
Grid 1	11	12	13	21	22	23	24	25	31	32	33
Grid 2	12	13	14	22	23	24	25	26	32	33	34
E (MPa)	70000	70000	70000	70000	70000	70000	70000	70000	70000	70000	70000
A (mm ²)	1200	1200	1200	1600	1600	1600	1600	1600	500	500	500
I (mm ⁴)	4000000	4000000	4000000	10000000	10000000	10000000	10000000	10000000	1000000	1000000	1000000
x1 (mm)	-1875	-1310	-670	-2881.9481	-2378.4741	-1875	-1250	-625	-1875	-1875	-1875
y1 (mm)	-2244.9944	-2615.2486	-2847.2311	-500	-500	-500	-500	-500	-500	-1081.6648	-1663.3296
x2 (mm)	-1310	-670	0	-2378.4741	-1875	-1250	-625	0	-1875	-1875	-1875
y2 (mm)	-2615.2486	-2847.2311	-2925	-500	-500	-500	-500	-500	-1081.6648	-1663.3296	-2244.9944
Le (mm)	675.509522	680.74658	674.498332	503.474063	503.474063	625	625	625	581.664811	581.664811	581.664811
m	0.83640568	0.94014427	0.99333085	1	1	1	1	1	0	0	0
n	-0.5481109	-0.3407767	-0.1152989	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
x1' (mm)	-1878.6159	-1311.8178	-670.2869	-2881.7588	-2378.3182	-1874.8777	-1249.9184	-624.95922	-1874.8777	-1877.2475	-1878.6264
y1' (mm)	-2254.3715	-2621.9808	-2849.9463	-506.94499	-508.34203	-510.1846	-513.76668	-517.00583	-510.1846	-1091.5802	-1672.9759
x2' (mm)	-1311.8178	-670.2869	0	-2378.3182	-1874.8777	-1249.9184	-624.95922	0	-1877.2475	-1878.6264	-1878.6159
y2' (mm)	-2621.9808	-2849.9463	-2925.9179	-508.34203	-510.1846	-513.76668	-517.00583	-518.26721	-1091.5802	-1672.9759	-2254.3715
theta1 (radian)	0.00144099	0.00663221	0.00508353	-0.002776	-0.0029574	-0.0046978	-0.0060383	-0.0038911	-0.0046978	-0.0033366	-0.0012904
theta2 (radian)	0.00663221	0.00508353	0	-0.0029574	-0.0046978	-0.0060383	-0.0038911	0	-0.0033366	-0.0012904	0.00144099
xe1 (mm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ye1 (mm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xe2 (mm)	675.509522	680.74658	674.498332	503.474063	503.474063	625	625	625	581.664811	581.664811	581.664811
ye2 (mm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x1'-x1 (mm)	-3.6158571	-1.8177858	-0.2869001	0.18930381	0.15581801	0.12233221	0.08155481	0.0407774	0.12233221	-2.2475425	-3.6264455
y1'-y1 (mm)	-9.3770503	-6.7322047	-2.7151399	-6.9449879	-8.3420331	-10.1846	-13.766675	-17.005834	-10.1846	-9.9154165	-9.6462334
x2'-x1 (mm)	563.182214	639.7131	670	503.629881	503.596395	625.081555	625.040777	625	-2.2475425	-3.6264455	-3.6158571
y2'-y1 (mm)	-376.98633	-234.6977	-78.686749	-8.3420331	-10.1846	-13.766675	-17.005834	-18.267206	-591.58023	-591.31104	-591.04186
xe1' (mm)	2.11533991	0.58519737	0.0280658	0.18930381	0.15581801	0.12233221	0.08155481	0.0407774	10.1845996	9.91541646	9.64623337
ye1' (mm)	-9.8249087	-6.9487027	-2.7301115	-6.9449879	-8.3420331	-10.1846	-13.766675	-17.005834	0.12233221	-2.2475425	-3.6264455
xe2' (mm)	677.679111	681.402109	674.60416	503.629881	503.596395	625.081555	625.040777	625	591.580227	591.311044	591.041861
ye2' (mm)	-6.6272024	-2.6503921	-0.9117391	-8.3420331	-10.1846	-13.766675	-17.005834	-18.267206	-2.2475425	-3.6264455	-3.6158571
ue1 (mm)	2.11533991	0.58519737	0.0280658	0.18930381	0.15581801	0.12233221	0.08155481	0.0407774	10.1845996	9.91541646	9.64623337
ve1 (mm)	-9.8249087	-6.9487027	-2.7301115	-6.9449879	-8.3420331	-10.1846	-13.766675	-17.005834	0.12233221	-2.2475425	-3.6264455
ue2 (mm)	2.16958825	0.65552884	0.10582827	0.15581801	0.12233221	0.08155481	0.0407774	0	9.91541646	9.64623337	9.37705029
ve2 (mm)	-6.6272024	-2.6503921	-0.9117391	-8.3420331	-10.1846	-13.766675	-17.005834	-18.267206	-2.2475425	-3.6264455	-3.6158571
p	8.0307E-05	0.00010332	0.00011529	-6.651E-05	-6.651E-05	-6.524E-05	-6.524E-05	-6.524E-05	-0.0004628	-0.0004628	-0.0004628
a	-3.056E-09	-1.969E-09	-6.776E-10	-7.253E-10	-1.325E-09	1.8601E-09	1.1161E-09	3.7202E-10	3.375E-10	3.375E-10	3.375E-10
b	6.9386E-06	8.7315E-07	-3.083E-06	3.6761E-07	-7.279E-07	-2.816E-06	6.7145E-07	2.7641E-06	8.7554E-07	1.4645E-06	2.0534E-06
c	0.00144099	0.00663221	0.00508353	-0.002776	-0.0029574	-0.0046978	-0.0060383	-0.0038911	-0.0046978	-0.0033366	-0.0012904
d	-9.8249087	-6.9487027	-2.7301115	-6.9449879	-8.3420331	-10.1846	-13.766675	-17.005834	0.12233221	-2.2475425	-3.6264455
U_axial (N-mm)	182.974583	305.185036	376.537734	124.718915	124.718924	148.986574	148.986573	148.986575	2180.02162	2180.02162	2180.02162
U_bending (N-mm)	6793.95233	1006.96365	5423.0241	93.3700865	2340.61865	1893.28524	2901.18866	8514.10997	113.830497	254.302772	451.265997
Mze1 (N-mm)	-3.886E+06	-4.890E+05	1.726E+06	-5.146E+05	1.019E+06	3.943E+06	-9.400E+05	-3.870E+06	-1.226E+05	-2.050E+05	-2.875E+05
Mze2 (N-mm)	4.179E+05	-1.763E+06	-2.494E+06	-1.019E+06	-3.820E+06	9.400E+05	3.870E+06	4.846E+06	2.050E+05	2.875E+05	3.699E+05
Pye1 (N)	-5133.5	-3308.0	-1138.3	-3046.3	-5563.6	7812.5	4687.5	1562.5	141.8	141.8	141.8
Pye2 (N)	5133.5	3308.0	1138.3	3046.3	5563.6	-7812.5	-4687.5	-1562.5	-141.8	-141.8	-141.8
Pxe1 (N)	-6745.8	-8678.5	-9684.3	7449.1	7449.1	7307.3	7307.3	7307.3	16197.3	16197.3	16197.3
Pxe2 (N)	6745.8	8678.5	9684.3	-7449.1	-7449.1	-7307.3	-7307.3	-7307.3	-16197.3	-16197.3	-16197.3

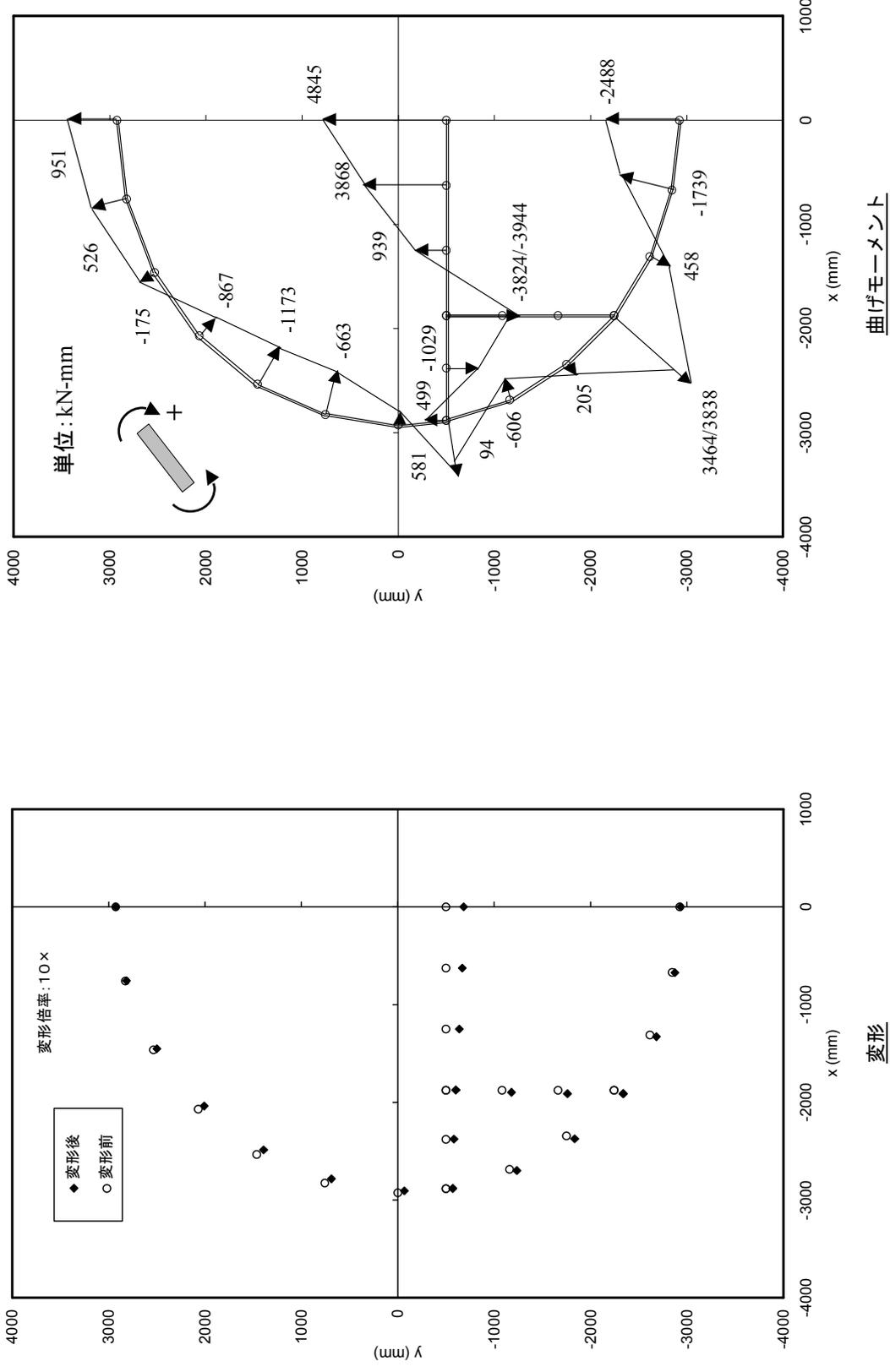


図 4-30 胴体フレームの変形と曲げモーメント分布

4.3.7 せん断応力の分布

支持長さ (Support Span) が梁の高さに比べて大きい梁の場合には、梁の断面内のせん断応力は曲げ応力に比べて小さいため無視できるが、そうでない場合には、せん断応力を考えなければならない。断面内のせん断応力の式とその説明をする。この式は後に出てくるせん断場理論でも使うのでしっかり理解してほしい。

代表的な断面のせん断応力分布を以下に示す。

- 矩形断面梁のせん断応力
- 円形断面のせん断応力
- 薄肉 I 型断面梁のせん断応力
- 角チューブのせん断応力
- 薄肉円筒のせん断応力

4.3.7.1 矩形断面梁のせん断応力

せん断力と曲げモーメントが働く矩形断面梁の一部を切り出して力の釣り合いを調べる (図 4-31)。梁の右側の断面 $x=x$ には曲げモーメント M とせん断力 V が働き、左側の断面 $x=x+dx$ にはモーメント $M+Vdx$ とせん断力 V が働く。高さ z の断面で切って力の釣り合いを考えると、せん断応力 f_s の合計は、この断面より上に働く曲げ応力の合計と等しい。式を書くと以下のようになる。

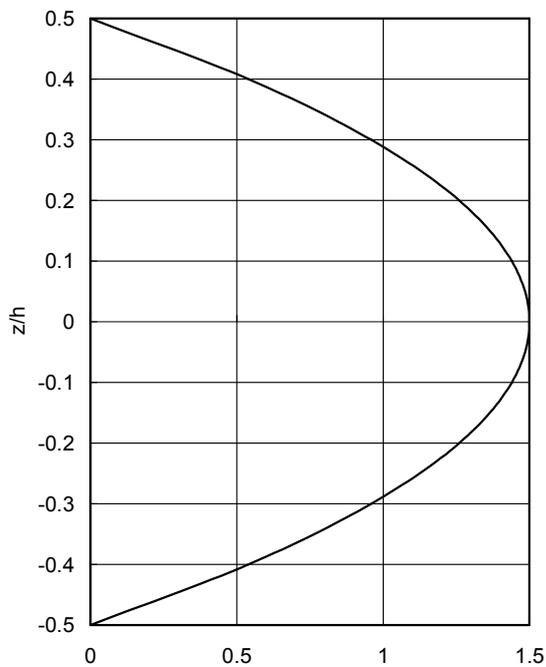
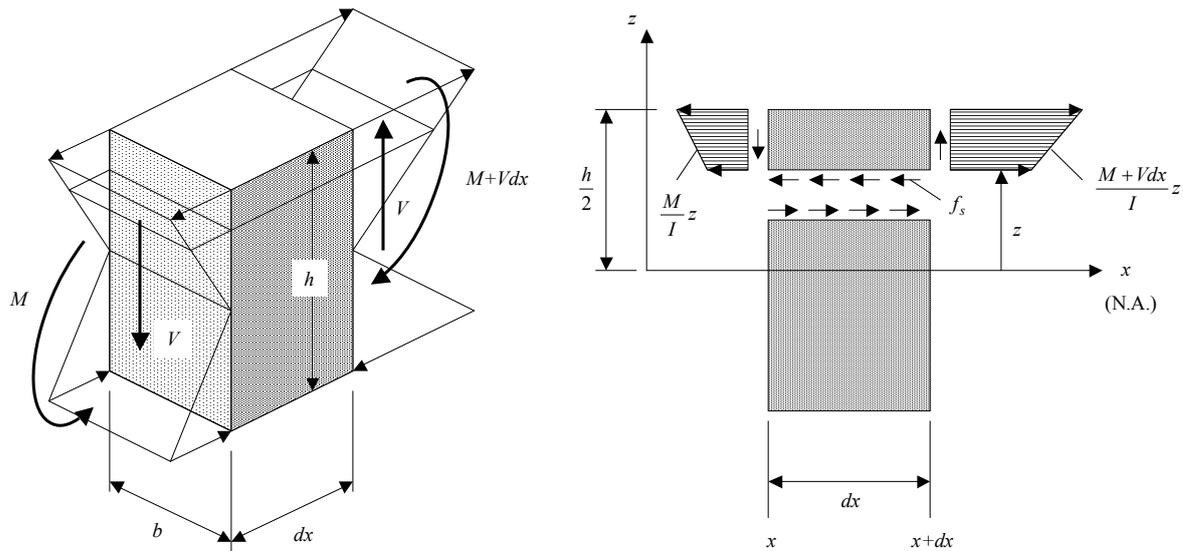
$$f_s b dx = \int_z^{\frac{h}{2}} \left(\frac{M+Vdx}{I} \right) z b dz - \int_z^{\frac{h}{2}} \frac{M}{I} z b dz = \frac{V b dx}{I} \int_z^{\frac{h}{2}} z dz = \frac{V b dx}{I} \left[\frac{z^2}{2} \right]_z^{\frac{h}{2}} = \frac{V b dx}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

$$f_s = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

断面 2 次モーメント I は、 $I = \frac{bh^3}{12}$ だから、せん断応力は次のようになる。

$$f_s = \frac{6V}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

せん断応力の最大値は $z=0$ (中立軸位置) で $f_s = \frac{3V}{2bh}$ となる。すなわち、矩形断面の梁のせん断応力は 2 次曲線の分布をし、最大せん断応力は、せん断力を面積で割った単純計算による値 $\frac{V}{bh}$ の 1.5 倍である。梁の上面と下面ではせん断応力がゼロになる。



正規化したせん断応力 $f_s/(V/bh)$

図 4-31 矩形断面梁のせん断応力

4.3.7.2 円形断面梁のせん断応力

円形断面の梁の場合も矩形断面梁の場合と同じようにせん断応力を計算できる。

$$f_s b dx = \int_z^R \left(\frac{M + V dx}{I} \right) z b dz - \int_z^R \frac{M}{I} z b dz = \frac{V dx}{I} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} (R \sin \theta) (2R \cos \theta) R \cos \theta d\theta = \frac{2VR^3 dx}{I} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{2VR^3 dx}{I} \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2VR^3 dx}{3I} \cos^3 \theta$$

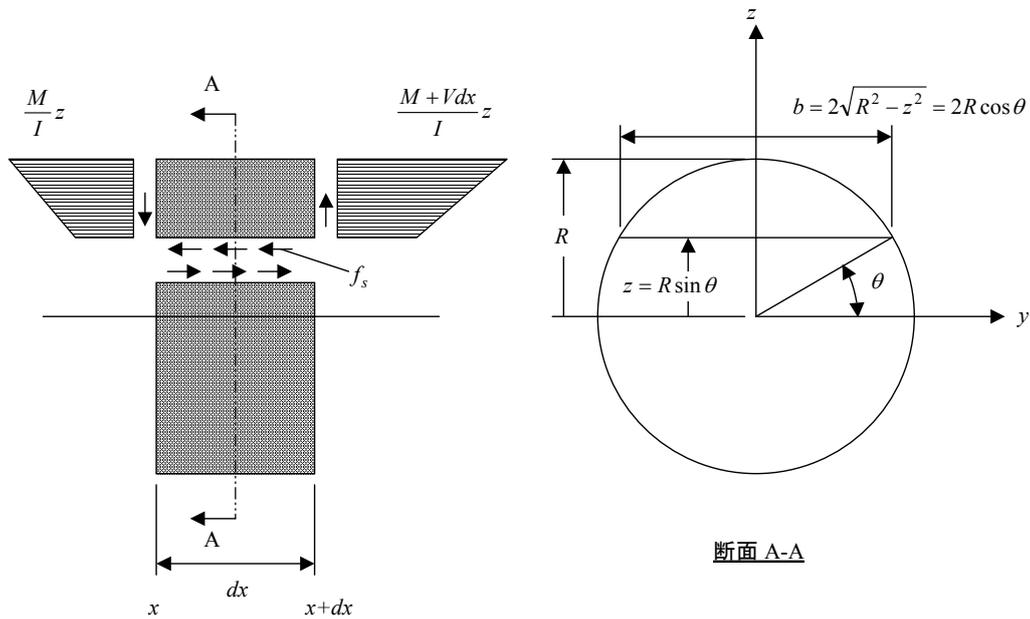
$$f_s = \frac{VR^2}{3I} \cos^2 \theta = \frac{VR^2}{3I} (1 - \sin^2 \theta) = \frac{V}{3I} (R^2 - z^2)$$

ここで、断面 2 次モーメント $I = \frac{\pi R^4}{4}$ ，断面積 $A = \pi R^2$ だから、

$$f_s = \frac{4V}{3\pi R^4} (R^2 - z^2) = \frac{4}{3A} \left(1 - \frac{z^2}{R^2} \right)$$

せん断応力の最大値は $z=0$ (中立軸位置) で $f_s = \frac{4V}{3A}$ となる。したがって、最大せん断応力はせん断力を面積で割

った単純計算による値 $\frac{V}{bh}$ の $\frac{4}{3}$ 倍である。



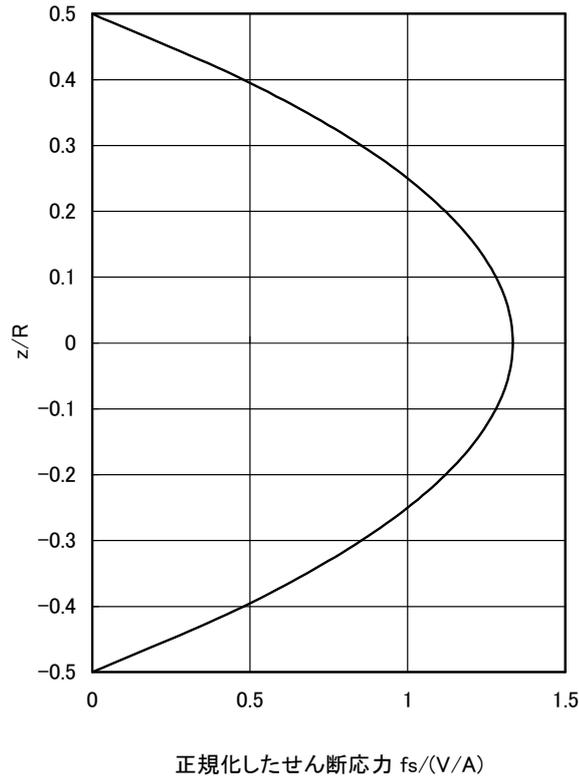


図 4-32 円形断面梁のせん断応力

4.3.7.3 薄肉 I 型断面梁のせん断応力

図 4-33 に示す薄肉 I 型断面梁のせん断応力を考える。まず、ウェブのせん断応力に注目する。力の釣り合いからこれまでと同じようにせん断応力を計算できる。

$$\begin{aligned}
 f_s t_2 dx &= \int_z^{\frac{h}{2}} \left(\frac{M + Vdx}{I} \right) z dA - \int_z^{\frac{h}{2}} \frac{M}{I} z dA = \frac{Vdx}{I} \int_z^{\frac{h}{2}} z dA = \frac{Vdx}{I} \left(b \int_{\frac{h}{2}-t_1}^{\frac{h}{2}} z dz + t_2 \int_z^{\frac{h}{2}-t_1} z dz \right) \\
 &= \frac{Vdx}{I} \left\{ b \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\frac{h}{2}-t_1}^{\frac{h}{2}} + t_2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_z^{\frac{h}{2}-t_1} \right\} = \frac{Vdx}{I} \left\{ \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} - t_1 \right)^2 \right) + \frac{t_2}{2} \left(\left(\frac{h}{2} - t_1 \right)^2 - z^2 \right) \right\} \\
 &= \frac{Vdx}{2I} \left\{ b t_1 (h - t_1) + t_2 \left(\left(\frac{h}{2} - t_1 \right)^2 - z^2 \right) \right\}
 \end{aligned}$$

ここで、 $\int () dA$ は面積で積分することを表す。

$$f_s = \frac{V}{2I t_2} \left\{ b t_1 (h - t_1) + t_2 \left(\left(\frac{h}{2} - t_1 \right)^2 - z^2 \right) \right\}$$

せん断応力分布の数値例を図 4-34 に示す。せん断力をウェブの断面積で割った応力を基準にしてせん断応力の分布を表示した。このグラフから I 型断面梁ではウェブがせん断力を受け持ち、せん断応力の分布は高さ方向にほとんど一様であることがわかる。

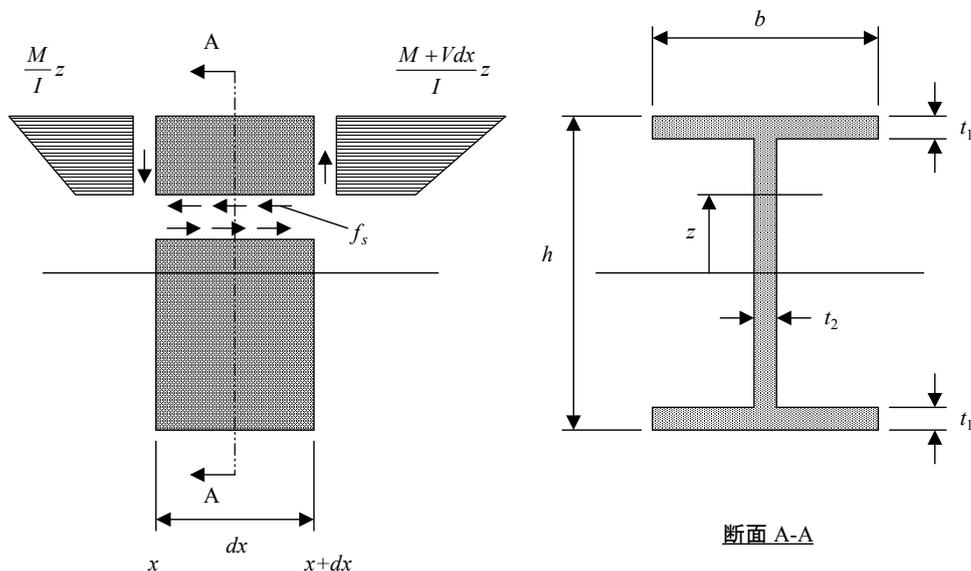


図 4-33 薄肉 I 型断面梁のせん断応力

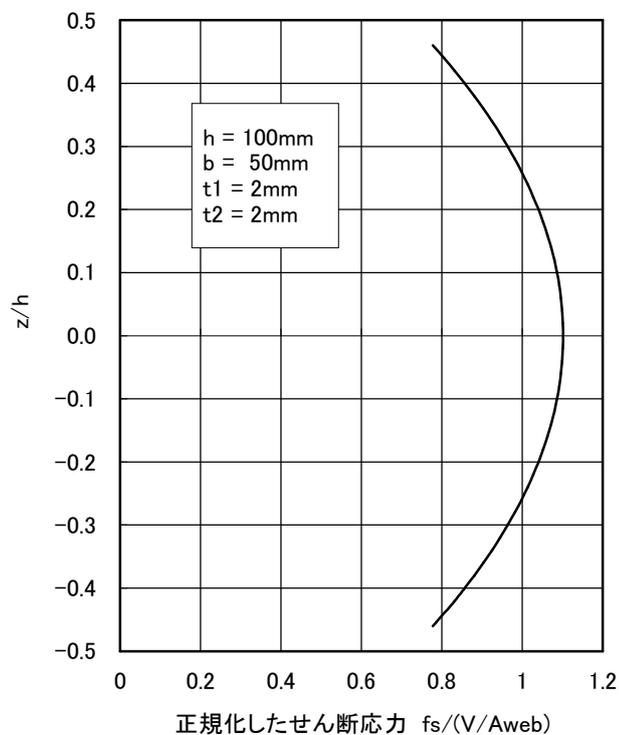


図 4-34 薄肉 I 型断面梁のせん断応力分布の数値例

次に、フランジ部のせん断応力はどうなっているかを考える。左端から距離 s 離れた断面に注目する(図 4-35)。左端からこの断面までの部分に働く軸力の差がこの断面のせん断力である。このせん断力はフランジの面内のせん断応力であることに注意すること。せん断応力の方向は断面の表面と平行になる。薄肉断面では板厚方向にせん断応力の分布が一様になっている。力の釣り合いは次の式になるので、

$$f_s t_1 dx = \frac{V}{I} \left(\frac{h}{2} - \frac{t_1}{2} \right) t_1 s dx$$

せん断応力は、

$$f_s = \frac{V}{2I} (h - t_1) s$$

薄肉断面梁の場合には、せん断応力に板厚をかけた量をせん断流 (Shear Flow) と呼び、 q で表す。

$$q = f_s t$$

フランジとウェブのせん断応力、せん断流の分布をまとめて図示すると、図 4-36 のようになる。せん断流はフランジとウェブの交点で等しい値になっている。

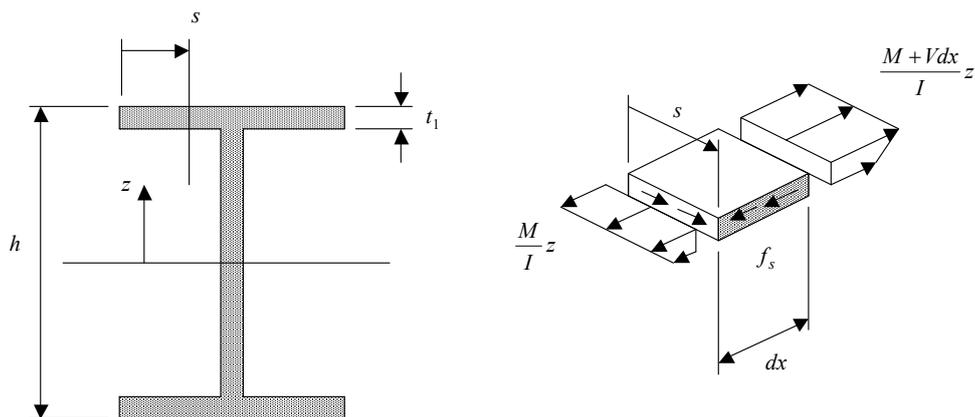


図 4-35 薄肉 I 型断面梁のフランジのせん断応力

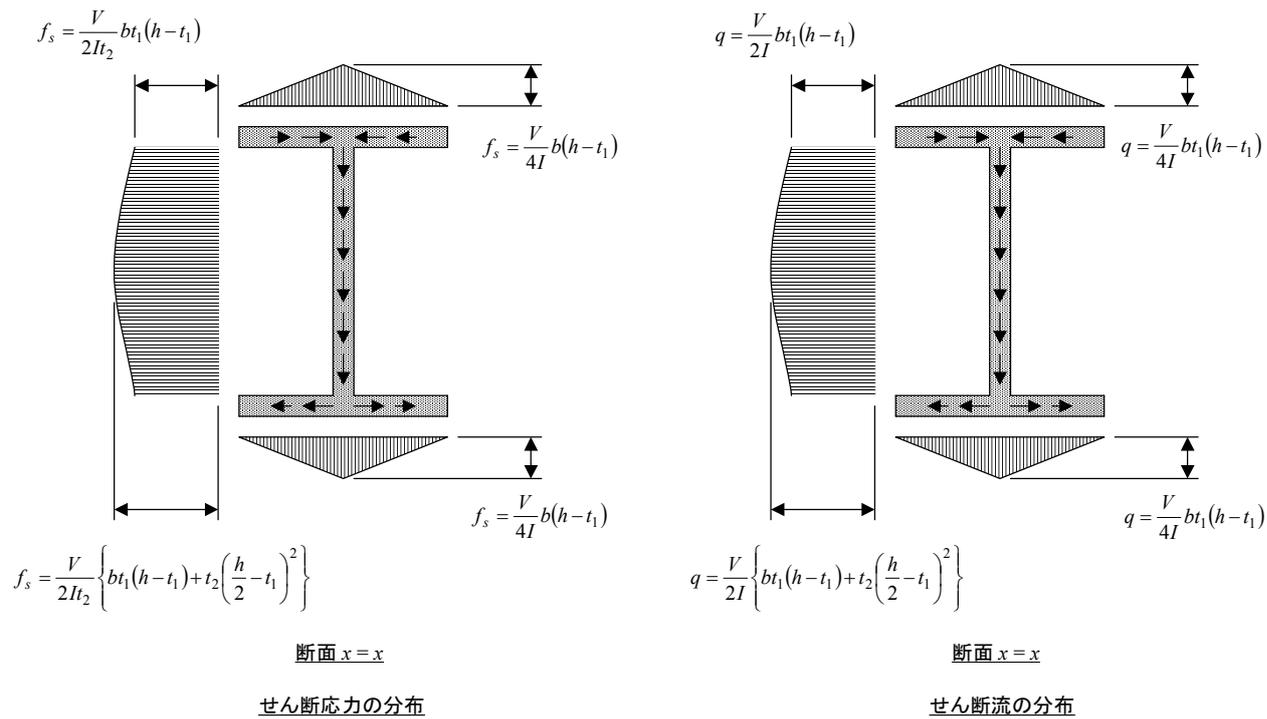


図 4-36 薄肉 I 型断面梁のせん断応力とせん断流の分布

4.3.7.4 角チューブのせん断応力

角チューブ形状の断面をした梁のせん断応力を考える。計算方法は薄肉I型断面梁とほとんど同じである。対称性からフランジの辺の中央でせん断応力がゼロになっていることを考えれば、I型断面梁を2つに分割して、左右反対にもう一度くっつけたと思えばよい（図 4-37, 図 4-38）。

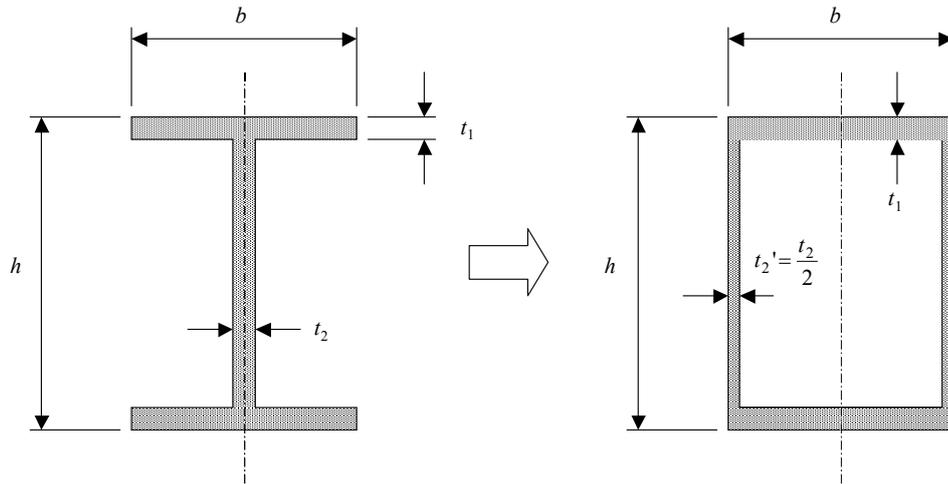


図 4-37 角チューブ断面とI型断面の関係

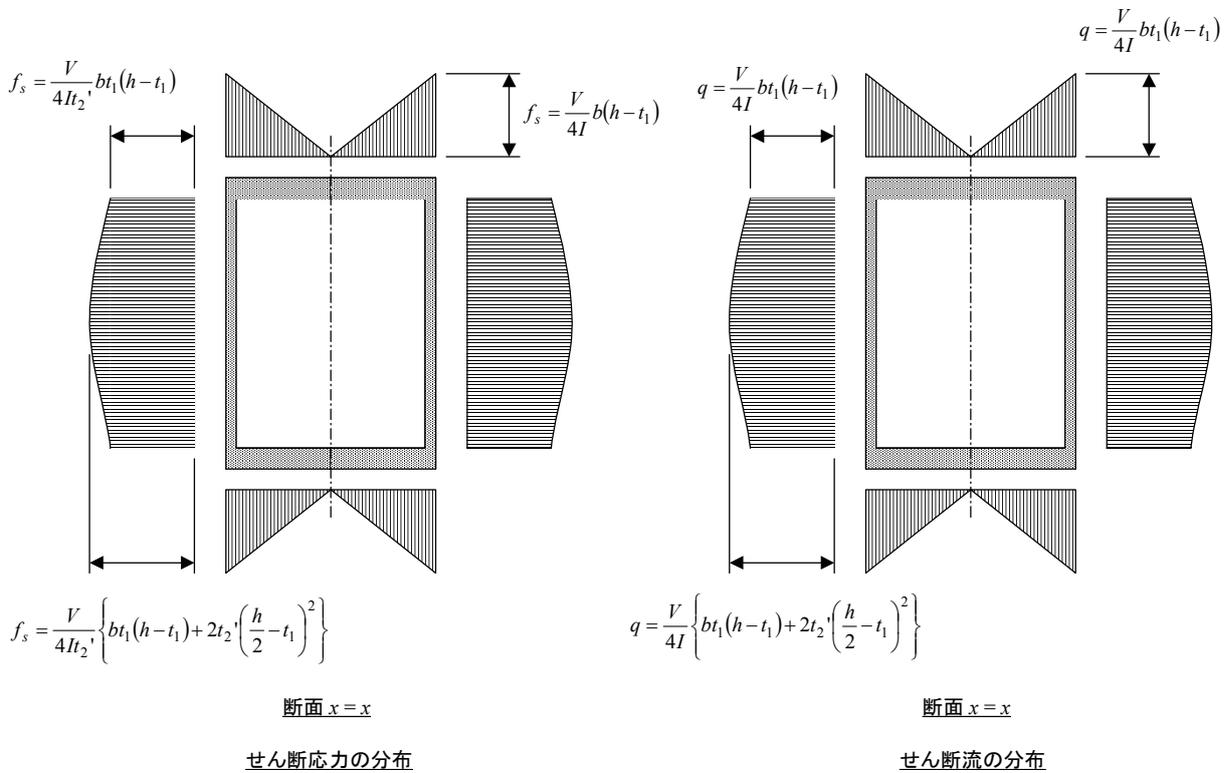


図 4-38 角チューブ断面梁のせん断応力とせん断流の分布

4.3.7.5 薄肉円筒のせん断応力

図 4-39 に示す薄肉円筒のせん断応力を考える、断面積と断面 2 次モーメントは次のように書ける。

$$A = \pi(r_o^2 - r_i^2) = \pi \left\{ \left(r + \frac{t}{2} \right)^2 - \left(r - \frac{t}{2} \right)^2 \right\} = \pi r^2 \left\{ \left(1 + \frac{t}{2r} \right)^2 - \left(1 - \frac{t}{2r} \right)^2 \right\} \cong 2\pi r t$$

$$I = \frac{\pi}{4}(r_o^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{4} \left\{ \left(r + \frac{t}{2} \right)^4 - \left(r - \frac{t}{2} \right)^4 \right\} = \frac{\pi r^4}{4} \left\{ \left(1 + \frac{t}{2r} \right)^4 - \left(1 - \frac{t}{2r} \right)^4 \right\} \cong \frac{\pi r^4}{4} \left\{ \left(1 + \frac{2t}{r} \right) - \left(1 - \frac{2t}{r} \right) \right\} = \pi r^3 t$$

ここで、

$$t = r_o - r_i$$

$$r = \frac{1}{2}(r_o + r_i)$$

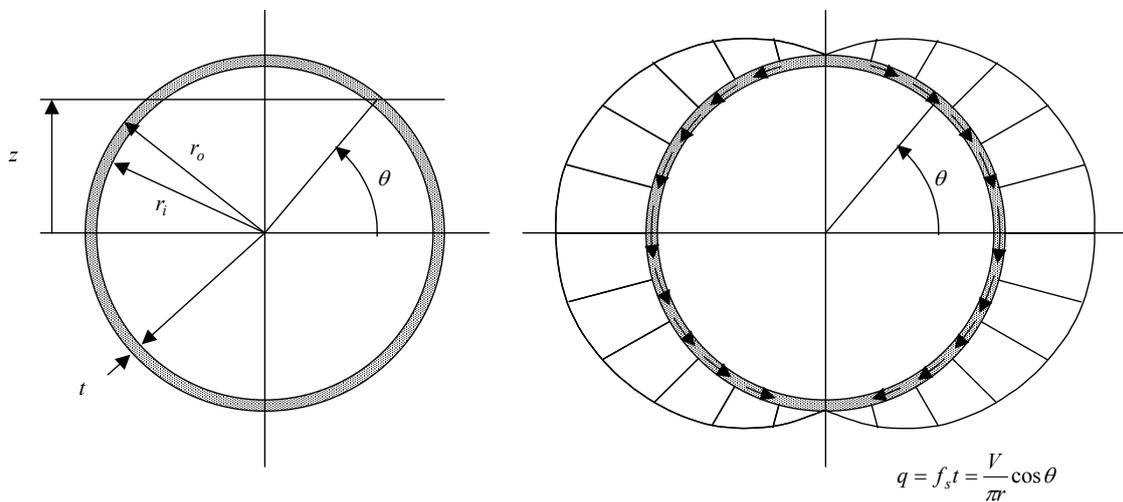
他の断面と同じようにせん断応力を計算すると以下ようになる。

$$f_s t dx = \frac{V}{I} dx \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} z dA = \frac{V}{I} dx \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} (r \sin \theta) t r d\theta = \frac{V t r^2 dx}{I} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{V t r^2 dx}{I} [-\cos \theta]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{V t r^2 dx}{I} \cos \theta$$

$$f_s = \frac{V r^2}{I} \cos \theta = \frac{V}{\pi r t} \cos \theta = \frac{2V}{A} \cos \theta$$

$$q = f_s t = \frac{V r^2 t}{I} \cos \theta = \frac{V}{\pi r} \cos \theta$$

このせん断流を図示すると、図 4-39 のようになる。



せん断流の分布

図 4-39 薄肉円筒断面のせん断流の分布

4.3.7.6 梁のせん断応力の式のまとめ

ここまで、いろいろな断面形状の梁のせん断応力について説明した。前項までに説明した内容は、単純形状の梁に限らず、航空機構造で頻繁にあらわれる組み合わせ梁（主翼桁間ボックス、主翼桁、胴体そのもの、胴体フレーム等）にも適用ができる。実際の例は後の項で説明するとして、基本となる式をもう一度ここでまとめておく。

断面内のせん断応力の釣り合い式は次のように表される。

$$f_s b dx = \frac{V}{I} dx \int_z^{z_1} z dA$$

せん断応力は次のようになる。

$$f_s = \frac{V}{Ib} \int_z^{z_1} z dA$$

非対称断面の梁のせん断応力を求める式については、Bruhnの教科書（文献[1-4]）を参照されたい。

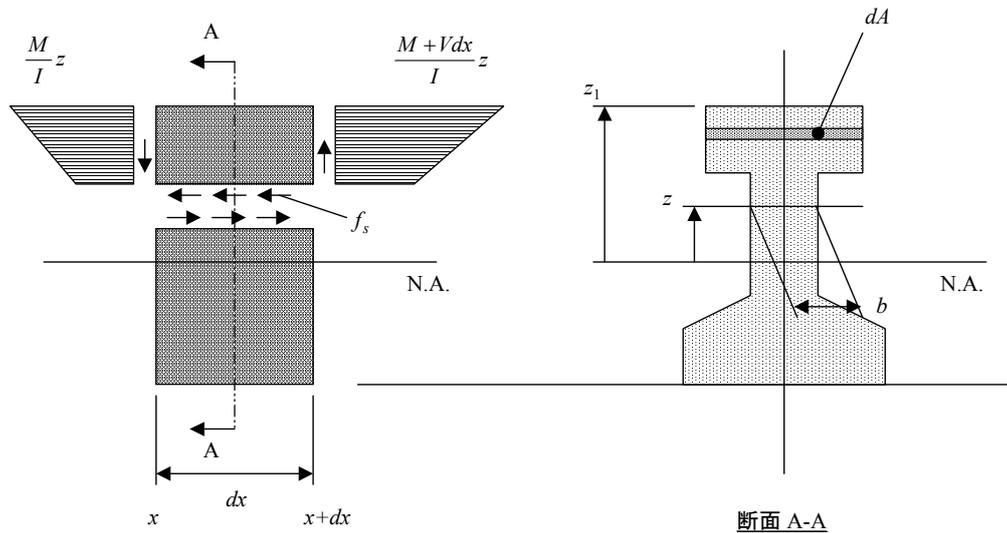


図 4-40 梁の断面のせん断応力の説明図

4.4 薄肉断面のねじり

梁には曲げモーメントとせん断力だけではなく、ねじり荷重が負荷されることもある。本項では、薄肉断面形状の部材にねじり荷重が働く場合を考え、せん断流とディファレンシャル・ベンディング (Differential Bending) について説明する。

前項では薄肉断面形状の梁が登場し、断面に働くせん断応力分布を説明した。この中で「せん断流」が出てきた。薄肉断面のねじりでもせん断流が出てくる。せん断流は、航空機構造を理解する重要な概念であるので、単純な薄肉断面梁でせん断流の概念になじんでおく必要がある。

4.4.1 薄肉閉断面のねじり

4.4.1.1 薄肉円筒断面のねじり

図 4-41 に示す薄肉円筒断面がねじられる場合を考える。外力はねじりモーメント (Torque) であり、このとき円筒には一様なせん断応力が発生する。せん断応力とねじりモーメントの関係は次のようになる。

$$T = \int_0^{2\pi} R f_s t R d\theta = 2\pi R^2 f_s t$$

$$q = f_s t = \frac{T}{2\pi R^2}$$

ここで、

T : ねじりモーメント

q : せん断流

f_s : せん断応力

t : 板厚

R : 円筒の半径 (板厚中心位置)

薄肉円筒の板厚が一定でない場合にも、ねじりによるせん断流は場所によらず一定であり、ねじりモーメントとせん断流の関係は同じ式で表される。これがせん断流を使う利点である。したがって、局所的なせん断応力は、せん断流を局所的な板厚で割れば得られる。

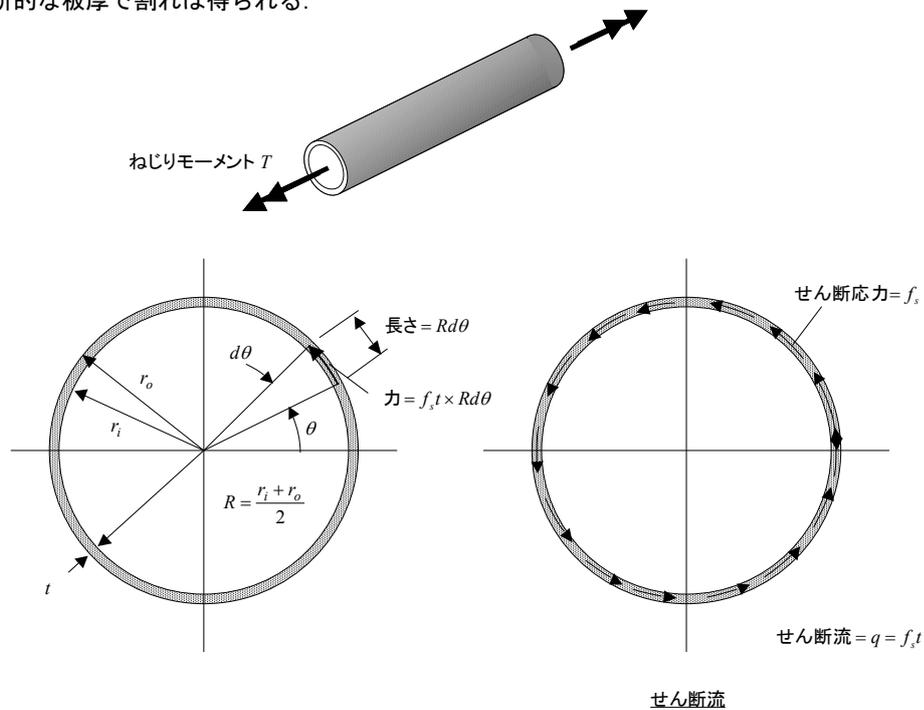


図 4-41 薄肉円筒のねじり

4.4.1.2 薄肉矩形断面のねじり

図 4-42 に示す薄肉矩形断面のねじりを考える。ねじりモーメントとせん断応力（せん断流）の関係式は以下のようになる。この式で、 $lds = 2dA$ という関係を使った。薄肉円筒の場合と同じように、ねじりが働く場合には、せん断流は一定である。

$$T = \oint_s l f_s t ds = \oint_s 2 f_s t dA = \oint_s 2 q dA = 2qA$$

$$q = \frac{T}{2A} = \frac{T}{2ab}$$

ここで、

T : ねじりモーメント

q : せん断流

f_s : せん断応力

t : 板厚

A : 断面の板厚中心で囲まれる面積

重要なことは、せん断流は板厚中心で囲まれる面積に反比例することである。前項の薄肉円筒断面の式でも面積で表示すればまったく同じ式になる。次項で一般断面でも同じ式になることを示す。

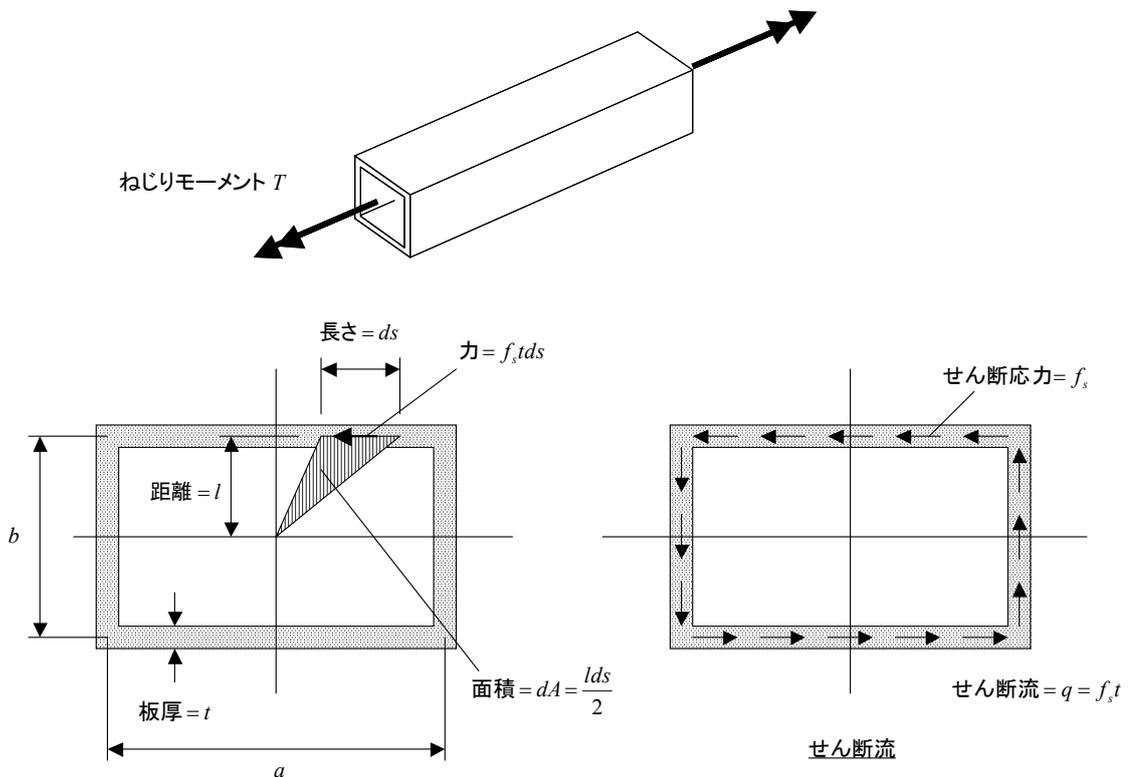


図 4-42 薄肉矩形断面のねじり

4.4.1.3 薄肉一般閉断面のねじり

図 4-43 に示す薄肉一般断面のねじりを考える。薄肉矩形断面と同じように、ねじりモーメントとせん断応力（せん断流）の関係式は以下ようになる。この式で、 $lds = 2dA$ という関係を使った。ねじりが働く場合には、せん断流は一定である。

$$T = \oint_s l f_s t ds = \oint_s 2 f_s t dA = \oint_s 2 q dA = 2qA$$

$$q = \frac{T}{2A}$$

ここで、

T : ねじりモーメント

q : せん断流

f_s : せん断応力

t : 板厚

A : 断面の板厚中心で囲まれる面積

閉断面のねじりでは、せん断流は断面の板厚中心で囲まれる面積に反比例するので、面積が大きいほどせん断流が小さくなり、構造がねじりに有効に働くことがわかる。ねじりモーメントだけが負荷される場合には、ねじりモーメントの負荷位置（図 4-43 の点 O ）はどこでもかまわない。梁にせん断力も負荷される場合には、ねじりモーメントが発生するので、負荷位置が問題になってくる。

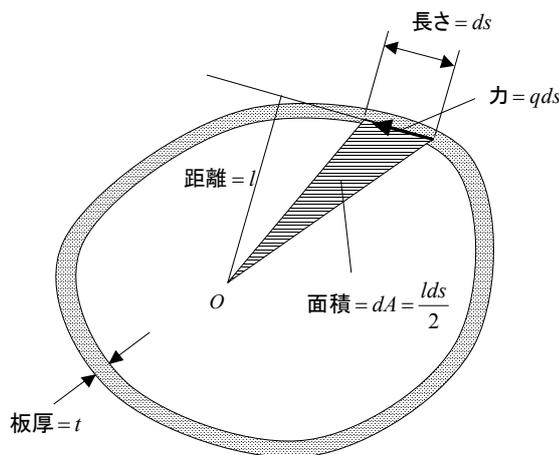


図 4-43 薄肉一般閉断面のねじり

次にねじり変形を考えよう。ねじれ変形量は回転角で表される。ねじりモーメントが負荷された単位長さの薄肉閉断面の梁（図 4-44）を考えると、そのコンプリメンタリ・エネルギー U_c はねじりモーメントを使って次の式のように表される。

$$U_c = \oint_s \frac{f_s^2}{2G} t ds = \oint_s \frac{q^2}{2Gt} ds = \oint_s \frac{T^2}{8A^2 G t} ds = \frac{T^2}{8A^2 G} \oint_s \frac{1}{t} ds$$

ここで、

G : せん断弾性係数

コンプリメンタリ・エネルギーをねじりモーメントで偏微分すると単位長さあたりのねじれ角 θ が得られる。

$$\theta = \frac{\partial U_c}{\partial T} = \frac{T}{4A^2G} \oint_{st} \frac{1}{t} ds = \frac{q}{2AG} \oint_{st} \frac{1}{t} ds$$

この式を次のように書き、サンブナン (St. Venant) のねじり剛性 (Torsional Rigidity) GJ を定義する。

$$\theta = \frac{T}{GJ}, \quad GJ = \frac{4A^2}{\oint_{st} \frac{ds}{Gt}}$$

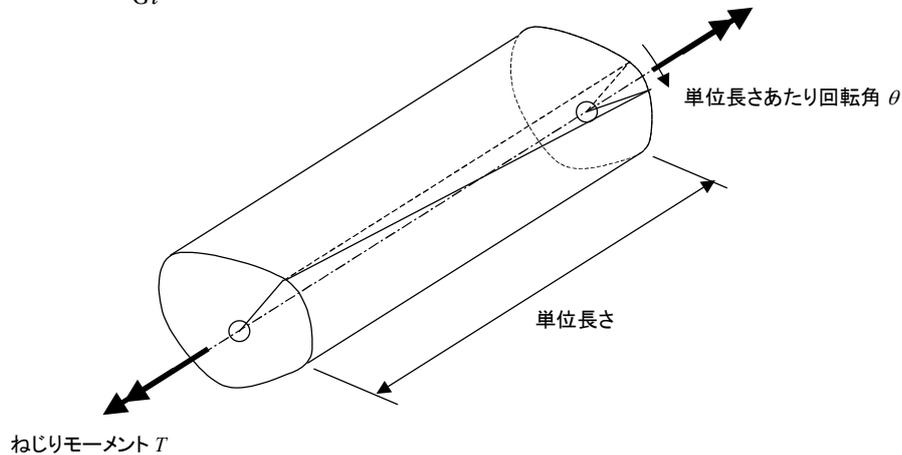


図 4-44 ねじれ角

4.4.2 薄肉開断面のねじり

薄肉開断面のねじりの場合には閉断面の場合と状況がまったく異なり、せん断応力とねじり変形がともに非常に大きくなる。この違いをよく理解する必要がある。

4.4.2.1 帯板のねじり

板厚 t 、幅 b の帯板のねじりを考える (図 4-45)。せん断応力は板の表面に沿って流れ、表面に近いほど値が大きくなり、帯板の中心でゼロになる。この帯板の断面に働く最大せん断応力は、幅の中央の板の表面で発生し、次の式のように表される。この式の導出に興味がある読者は弾性力学の教科書を参照されたい。

$$f_{s,\max} = \frac{3T}{bt^2}$$

ここで、

$f_{s,\max}$: 最大せん断応力, T : ねじりモーメント

単位長さあたりのねじれ角 θ とねじり係数 J は次のようになる。

$$\theta = \frac{3T}{Gbt^3} = \frac{T}{GJ}, \quad J = \frac{bt^3}{3}$$

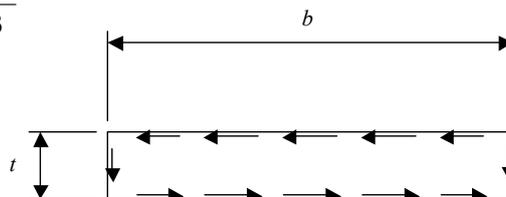


図 4-45 帯板のねじり

4.4.2.2 薄肉開円筒断面のねじり

薄肉開円筒断面のねじりを考え、閉断面のときとの違いを見てみよう。最大せん断応力とねじれ角の式は、帯板の板幅を円筒の周長に置き換えて、次のようになる。

$$f_{s,max} = \frac{3T}{2\pi R t^2}, \quad \theta = \frac{3T}{2\pi G R t^3}$$

ここで、

R : 板厚中心位置の半径

開断面と閉断面の単位長さあたりのねじれ角と最大応力を比較すると、

$$\frac{\theta_{open}}{\theta_{closed}} = \frac{\frac{3T}{2\pi G R t^3}}{\frac{T}{4A^2 G} \oint_s \frac{1}{t} ds} = \frac{\frac{3T}{2\pi G R t^3}}{\frac{2\pi R T}{4\pi^2 R^4 G t}} = \frac{3T}{2\pi G R t^3} \frac{4\pi^2 R^4 G t}{2\pi R T} = \frac{3R^2}{t^2}$$

$$\frac{f_{s,open}}{f_{s,closed}} = \frac{\frac{3T}{2\pi R t^2}}{\frac{T}{2\pi R t^2}} = \frac{3T}{2\pi R t^2} \frac{2\pi R^2 t}{T} = \frac{3R}{t}$$

数値例として、板厚 1mm、半径 10mm の薄肉円筒のねじりを計算してみると、

$$\frac{\theta_{open}}{\theta_{closed}} = \frac{3R^2}{t^2} = \frac{3 \times 10^2}{1^2} = 300$$

$$\frac{f_{s,open}}{f_{s,closed}} = \frac{3R}{t} = \frac{3 \times 10}{1} = 30$$

開断面のねじれ角は 300 倍、最大せん断応力は 30 倍にもなる。開断面がねじりに対していかに効率が悪いかが実感できる。

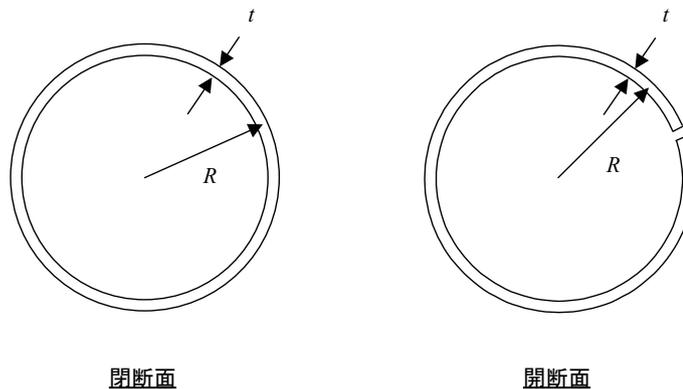


図 4-46 円筒開断面と閉断面のねじりの比較

4.4.2.3 薄肉一般開断面のねじり

薄肉一般開断面にねじりモーメント T が働く場合 (図 4-47) の単位長さあたりねじれ角 θ は次の式で表される。

$$\theta = \frac{3T}{G \sum b_i t_i^3} = \frac{T}{GJ}, \quad J = \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3$$

ここで、

- i : i 番目の要素
- b : 要素の幅
- t : 要素の板厚

要素 j の最大せん断応力は次のようになる。

$$f_{s, \max, j} = \frac{3T t_j}{\sum b_i t_i^3} = \frac{T t_j}{J}$$

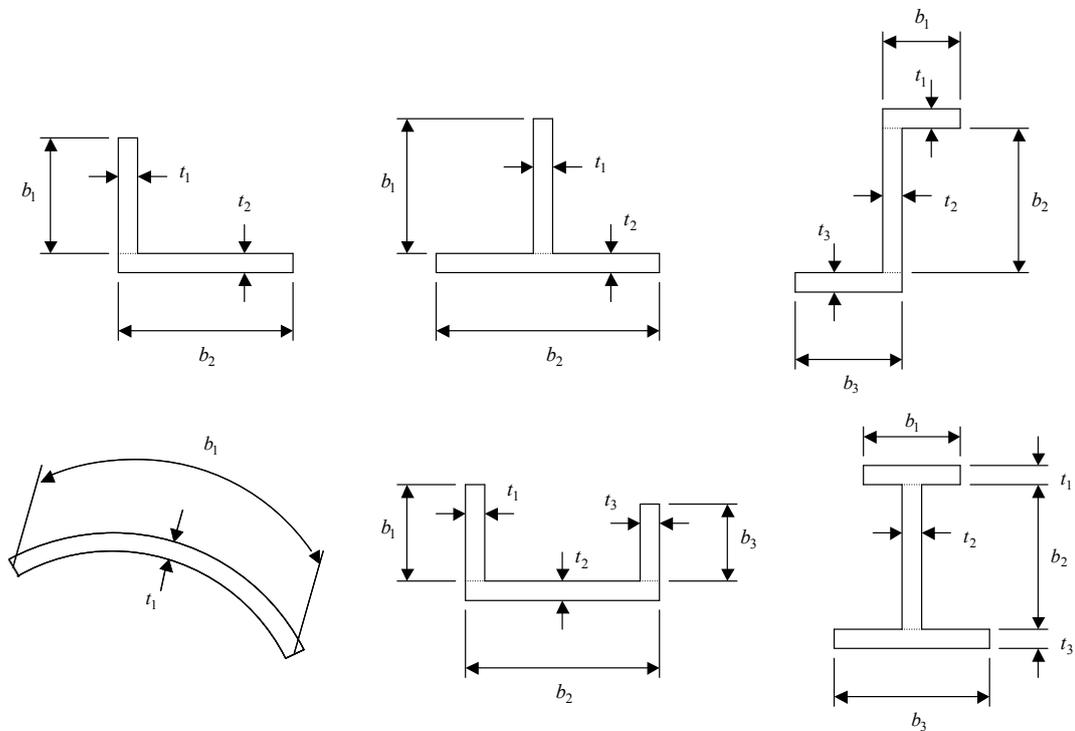


図 4-47 薄肉一般開断面のねじり

4.4.2.4 チャンネル断面のせん断中心

チャンネル断面の梁にせん断荷重が働く場合のせん断流の分布を 4.3.7.6 項の式で計算すると図 4-48 のようになる。上下のフランジに働くせん断流の合計は向きが逆なので、このせん断流はウェブの中心に対してねじりモーメントを発生する。ねじりモーメントを発生しない点はウェブの背面に来る。この点に上下せん断荷重が負荷されるときにこの梁はねじれないことになる。この点のことをせん断中心 (Shear Center) と呼ぶ。薄肉開断面梁はなじり剛性が小さいので、外荷重であるせん断荷重はせん断中心に働くように設計する必要がある。

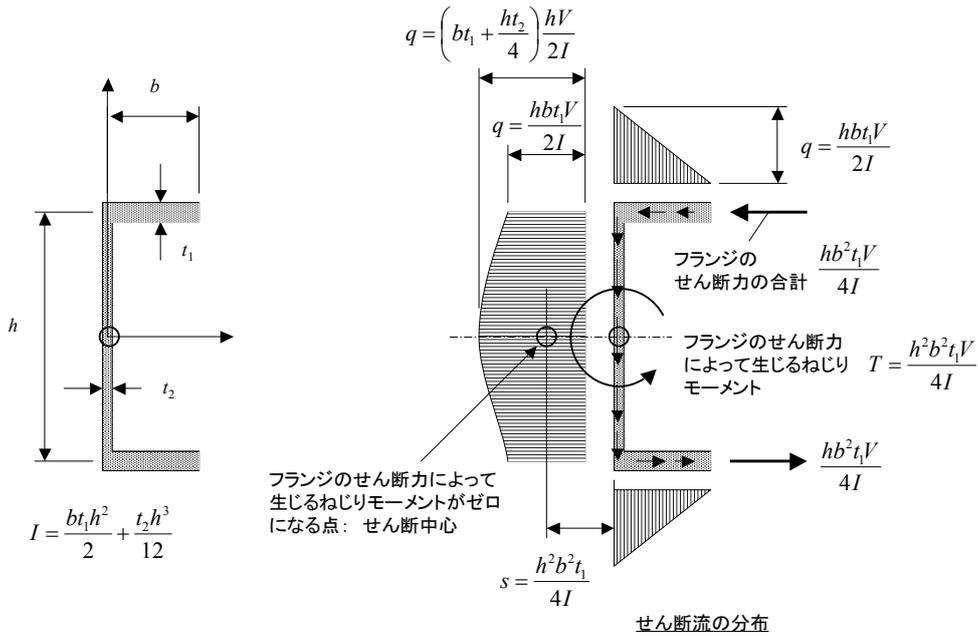


図 4-48 チャンネル断面のせん断中心

4.4.3 ディファレンシャル・ベンディング

前項までの説明では、ねじりによって断面にせん断応力だけが発生し、軸方向の応力が発生しないと仮定していた。この状態は「サンブナンのねじり」(または純ねじり)と呼ばれ、梁の両端面を剛に固定しない場合や、断面の寸法に比較して梁が長いときに成り立つ仮定である。純ねじりでは断面が面外方向に不均等に变形(ワーピング Warping と呼ぶ)している。面外方向の变形を拘束すると(「ワーピングを拘束する」という)、ねじりによって軸方向の応力が発生してせん断応力が減少するとともに、ねじれ変形も減る。特に開断面の場合には、もともと断面のねじり剛性が低いので、軸方向の応力の寄与が大きくなり、純ねじりとの差が大きくなる。

ワーピングを拘束することによってねじり剛性が大きく変化する例を図 4-49 に示す。2つの梁が反対方向に曲がることでねじりモーメントを発生しているので、ディファレンシャル・ベンディング(Differential Bending)と呼ぶ。後部胴体に大きな貨物室扉がある輸送機の後部胴体のねじりがディファレンシャル・ベンディングの実例である。

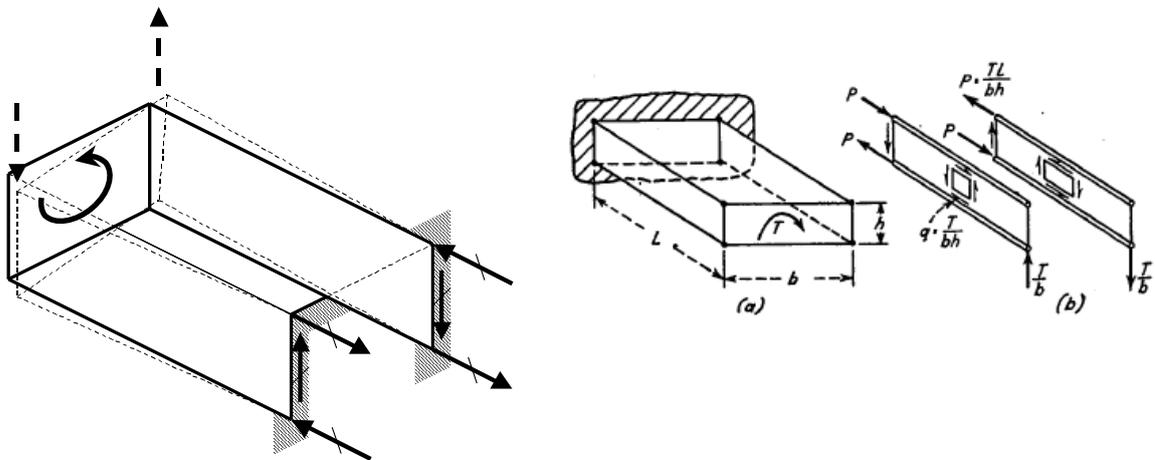


図 4-49 ディファレンシャル・ベンディングの例

4.5 箱桁構造

前項までにせん断と曲げを受け持つ梁と、ねじり荷重を受け持つ構造について説明した。せん断、曲げ、ねじりの全部を受け持つには、箱型の構造にするのが有利である。航空機の場合は、構造の外表面を空力面となることが多いので、曲面の外形を持つ箱型構造にする。これを一般に箱桁構造 (Box Beam) と呼ぶ。箱桁構造の代表例は主翼である。箱桁構造を形成する構造要素は、外板、桁、リブまたはフレームである。外板と桁でせん断、曲げ、ねじり荷重を受け持ち、リブとフレームは断面の形を保つ役割と集中荷重を外板と桁に分散する役割がある。

4.5.1 1本桁構造の曲げねじり

図 4-50 に示す片持ち 1 本桁構造を考える。桁の前に前縁リブと前縁外板がついた構造で、前縁外板と桁ウェブでトルクボックス (Torque Box) を形成している。リブが 400mm ピッチで配置されており、この問題では、2 つのステーションでリブから集中荷重を負荷している。

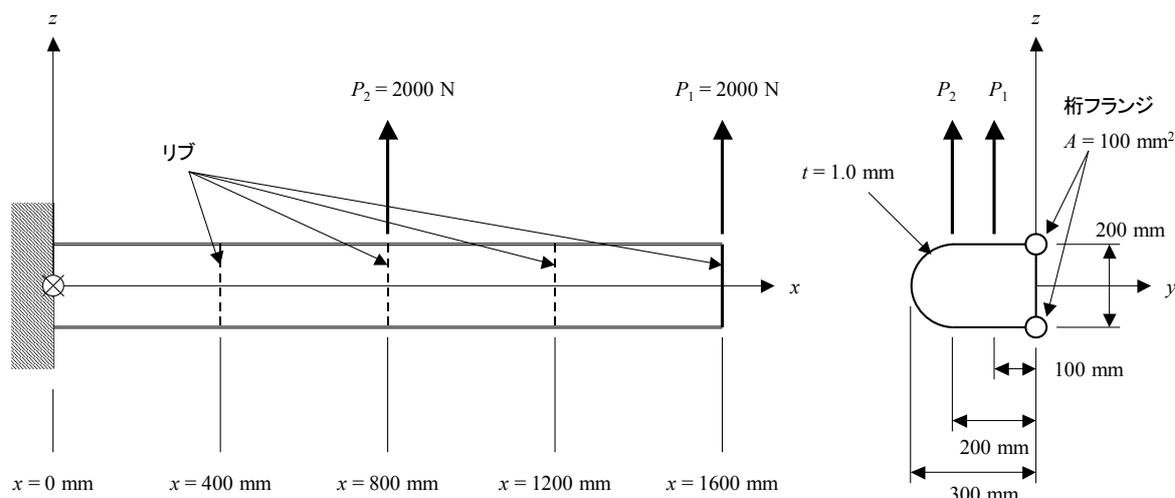


図 4-50 片持ち 1 本桁構造

この構造は、長さ 1600mm の片持ち梁と考えることができる。せん断力図、曲げモーメント図、ねじりモーメント図は図 4-51 のようになる。

上下の曲げには桁フランジだけが有効であるとする。桁ウェブと前縁外板は軸力を受け持たず、せん断にだけ有効であるとする。このとき、曲げ剛性 I は、

$$I = 2Az^2 = 2 \times 100 \times 100^2 = 2000000 \text{ mm}^2$$

曲げによる桁フランジの軸力は各断面位置での曲げモーメントから曲げの式で簡単に計算できる。

$0 < x < 800$ の区間のせん断流を計算する。この区間では、せん断力 $V = 4 \text{ kN}$ 、ねじりモーメント $T = -600 \text{ kN}\cdot\text{mm}$ が働いている。図 4-52 の左の図に示すように、外板の一部を切断してねじりモーメントを受け持たないとする。このときせん断荷重は桁ウェブだけで受け持ち、せん断流は、 $q_0 = 20 \text{ N/mm}$ である。このせん断流は x 軸まわりのねじりモーメントを生じない。 x 軸まわりのねじりモーメントにより図 4-52 の右の図に示すように、前縁外板と桁ウェブで作られるトルクボックスに生じる $q_T = -10.77 \text{ N/mm}$ が生じる。左の図と右の図を足し合わせると、せん断流の分布が得られる (図 4-53 の左の図)。同じように $800 < x < 1600$ の区間のせん断流を計算した結果を図 4-53 の右の図に示す。

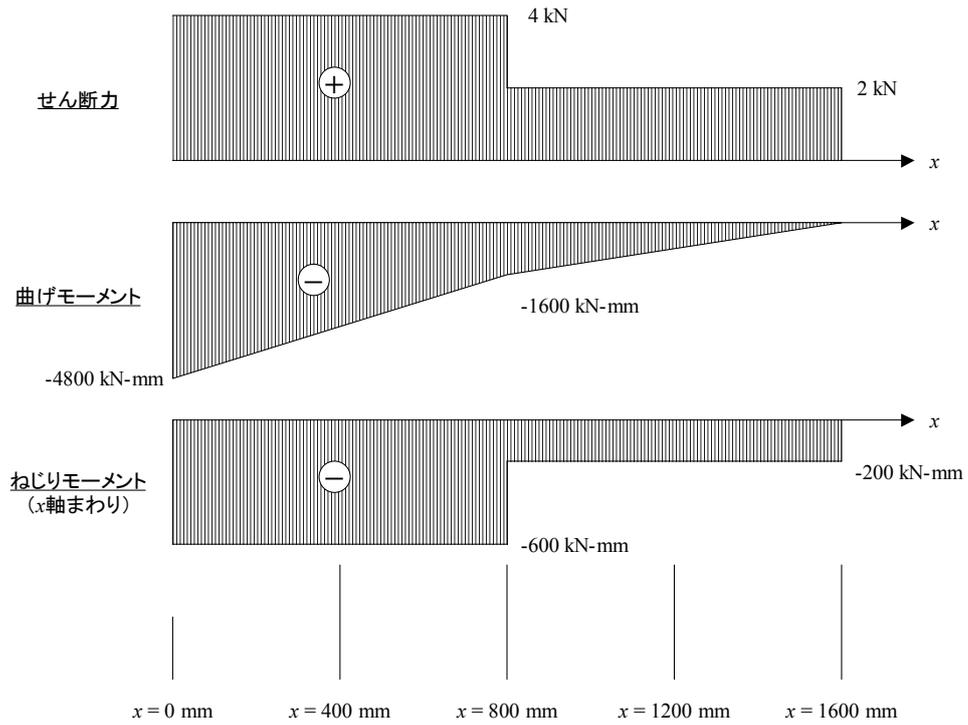


図 4-51 1本桁構造の荷重分布

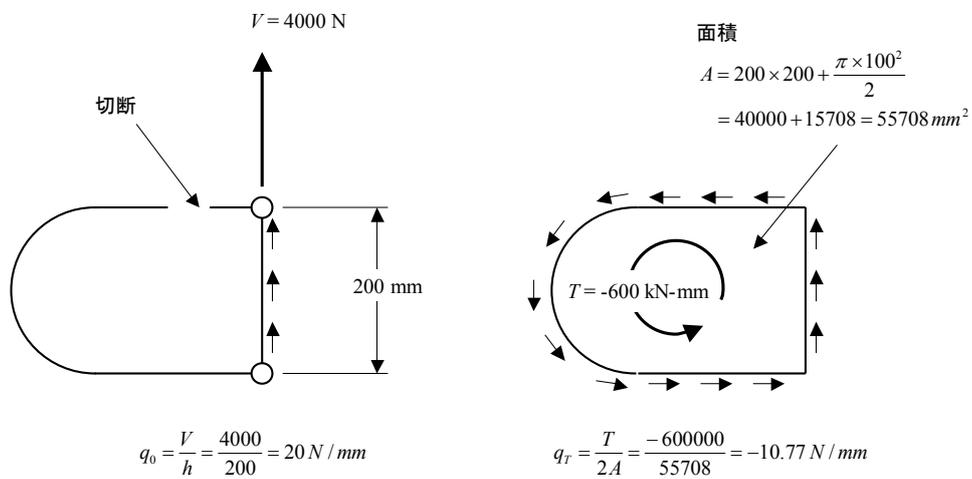


図 4-52 1本桁構造のせん断流の計算 - $0 < x < 800$

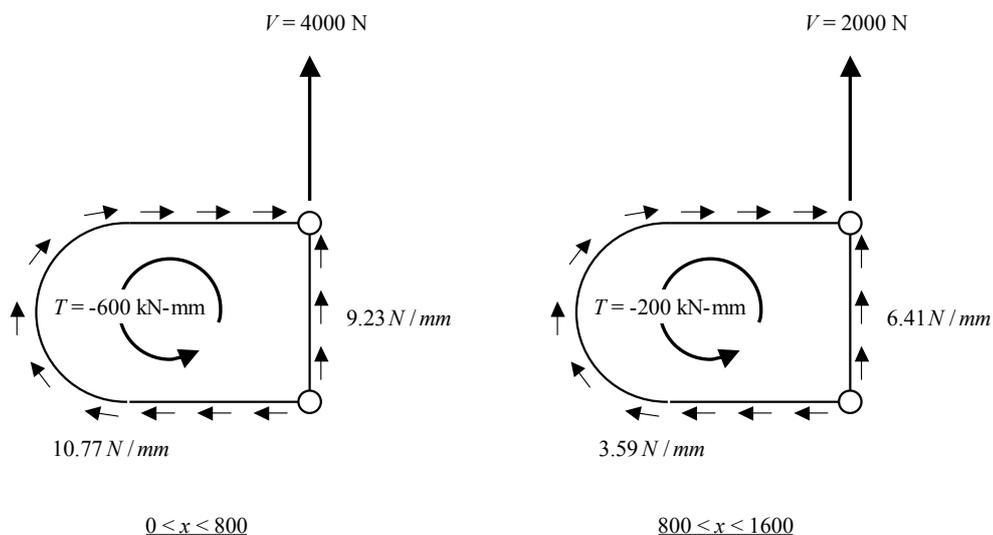


図 4-53 1本桁構造のせん断流の分布

次に、集中荷重が入る $x = 800$ のリブに働く力を調べてみる。図 4-54 の左の図に示すように $x = 800$ リブの両側のフリーボディ・ダイアグラムを描いてみると、リブの両側の前縁外板と桁ウェブのせん断流の差がリブに働く反力であることがわかる。リブの力の釣り合いは、図 4-54 の右の図ようになる。リブが集中荷重 P_2 をせん断流として外板と桁ウェブに分散して伝達している。これがリブの役割である。

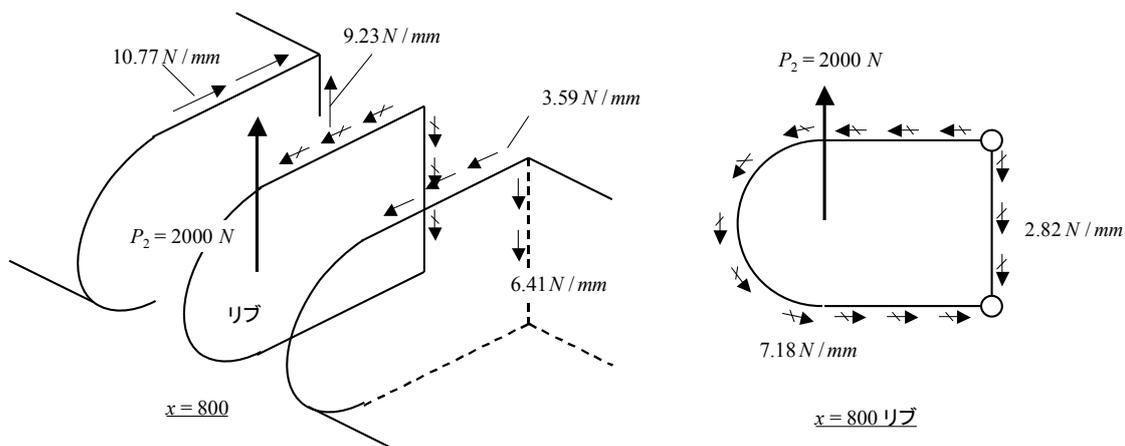


図 4-54 1本桁構造 - $x = 800$ リブの力の釣り合い

4.5.2 対称2本桁構造の曲げねじり

Bruhnの教科書のA15.7項に載っている対称2本桁構造の曲げねじりを考える(図4-55, 図4-56)。この構造では上下面の外板にストリングがついている。この問題ではせん断力が梁の長手方向に一定で $V = 100 \text{ lb}$ であり、ねじりモーメントも一定である。

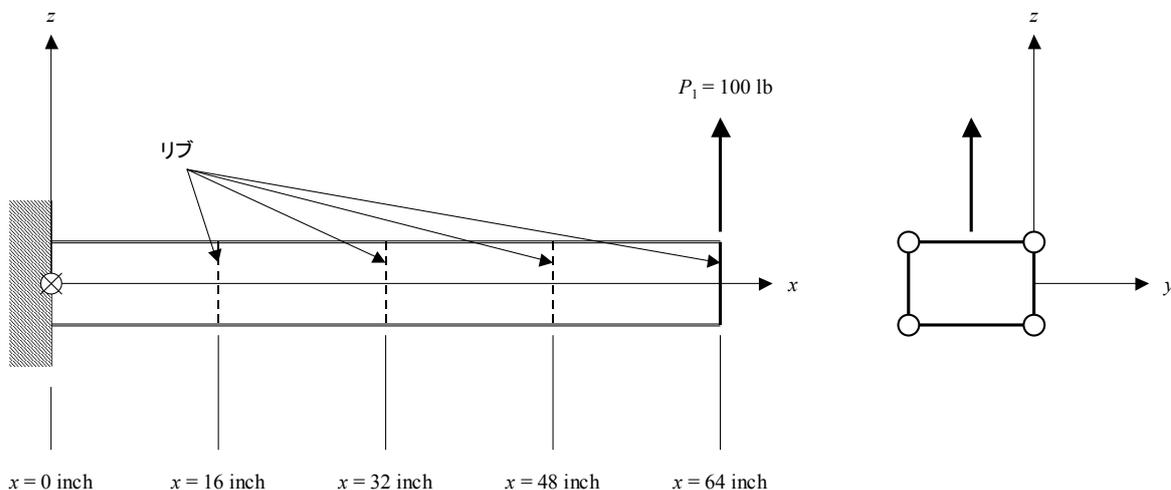


図 4-55 2本桁構造の曲げねじり

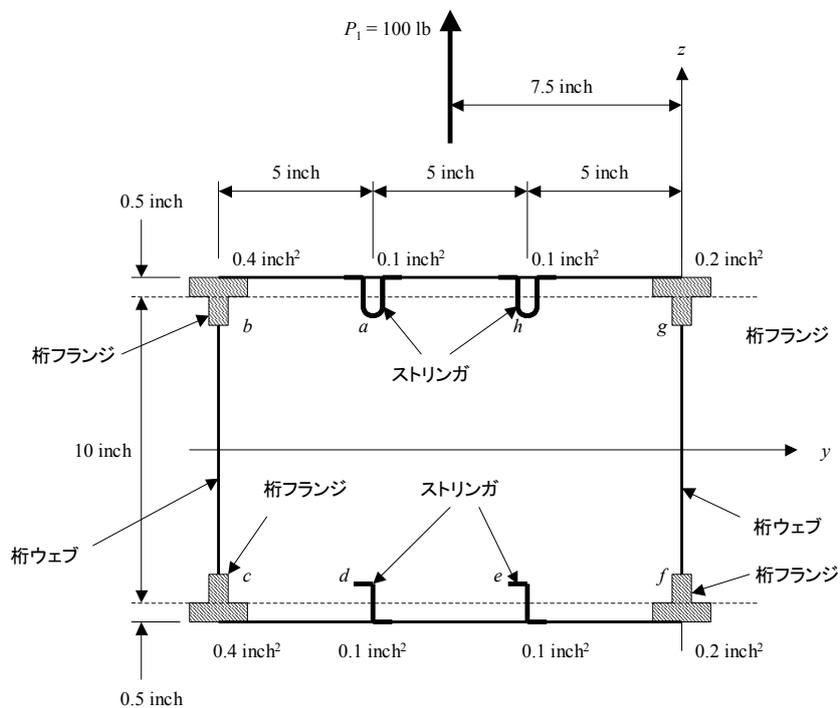


図 4-56 2本桁構造の断面詳細

桁フランジとストリングが曲げの軸力を受け持ち、桁ウェブと外板は曲げには利かないとする。断面は図 4-57 のようにモデル化される。この断面の断面特性を計算した結果を表 4-10 に示す。桁フランジとストリングの軸力は、曲げモーメントと断面 2 次モーメントから簡単に計算できるので、ここでは示さない。

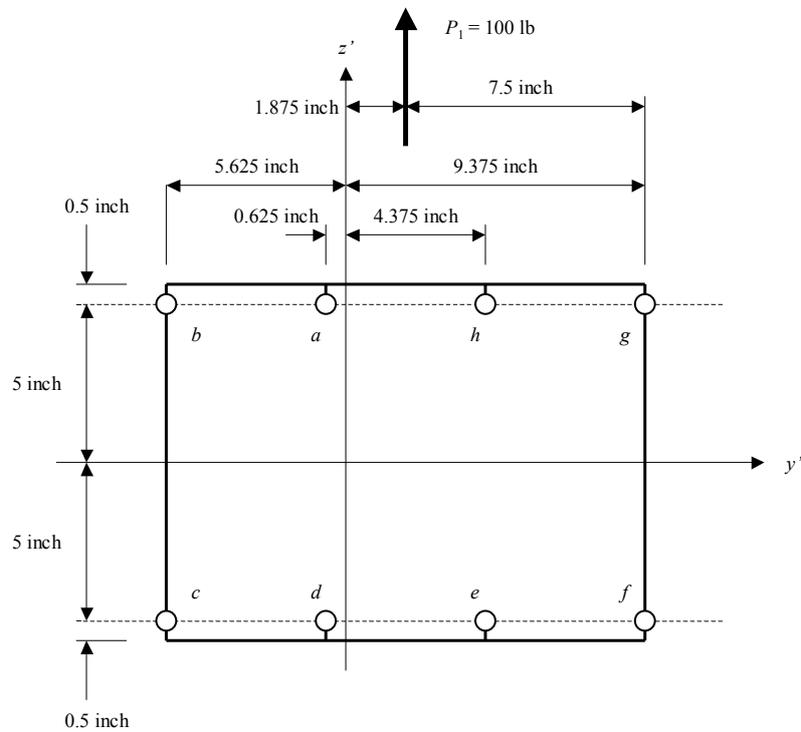


図 4-57 2 本桁構造の断面のモデル

表 4-10 2 本桁構造の断面特性の計算

Element	A (inch ²)	y (inch)	z (mm)	A*y (inch ³)	A*y ² (inch ⁴)	A*z (inch ³)	A*z ² (inch ⁴)	y' (inch)	z' (inch)	A*z' (inch ³)	ΣA*z' (inch ³)	q (lb/inch)
a	0.1	-10	5	-1	10	0.5	2.5	-0.625	5	0.5	0	0.000
b	0.4	-15	5	-6	90	2	10	-5.625	5	2	0.5	1.250
c	0.4	-15	-5	-6	90	-2	10	-5.625	-5	-2	2.5	6.250
d	0.1	-10	-5	-1	10	-0.5	2.5	-0.625	-5	-0.5	0.5	1.250
e	0.1	-5	-5	-0.5	2.5	-0.5	2.5	4.375	-5	-0.5	0	0.000
f	0.2	0	-5	0	0	-1	5	9.375	-5	-1	-0.5	-1.250
g	0.2	0	5	0	0	1	5	9.375	5	1	-1.5	-3.750
h	0.1	-5	5	-0.5	2.5	0.5	2.5	4.375	5	0.5	-0.5	-1.250
Sum	1.6	-	-	-15	205	0	40	-	-	-	-	-

A	=	1.6	inch ²
y _{bar}	=	-9.375	inch
z _{bar}	=	0	inch
I _y	=	40	inch ⁴
I _z	=	64.375	inch ⁴

V _z	=	100	lb
----------------	---	-----	----

次に、せん断流の分布を計算する。図 4-58 に示すように、上面外板の中央を切断したとき、4.3.7.6 項のせん断応力の計算式 $f_s = \frac{V}{Ib} \int_z^{z_1} z dA$ をせん断流に書き換えた式 $q = \frac{V}{I} \int_z^{z_1} z dA$ でせん断流を計算できる。せん断流の計算の過程を表 4-10 に示した。このせん断流に対して O 点まわりのねじりモーメント T_0 を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} T_0 &= 1.25 \times 0.5 \times 10 \times 2 - 1.25 \times 5 \times 5.5 \times 2 - 1.25 \times 0.5 \times 15 \times 2 - 6.25 \times 10 \times 15 \\ &\quad + 1.25 \times 0.5 \times 5 \times 2 + 1.25 \times 5 \times 5.5 \times 2 \\ &= -937.5 \text{ lb} - \text{inch} \end{aligned}$$

(せん断荷重 $V = 100 \text{ lb}$ でこのねじりモーメントを発生するには、せん断荷重が O の点から $e = T_0/V = 9.375 \text{ inch}$ の位置に働けばよいことになる。すなわち、この位置にせん断荷重が働けばこの開断面がねじれない。)

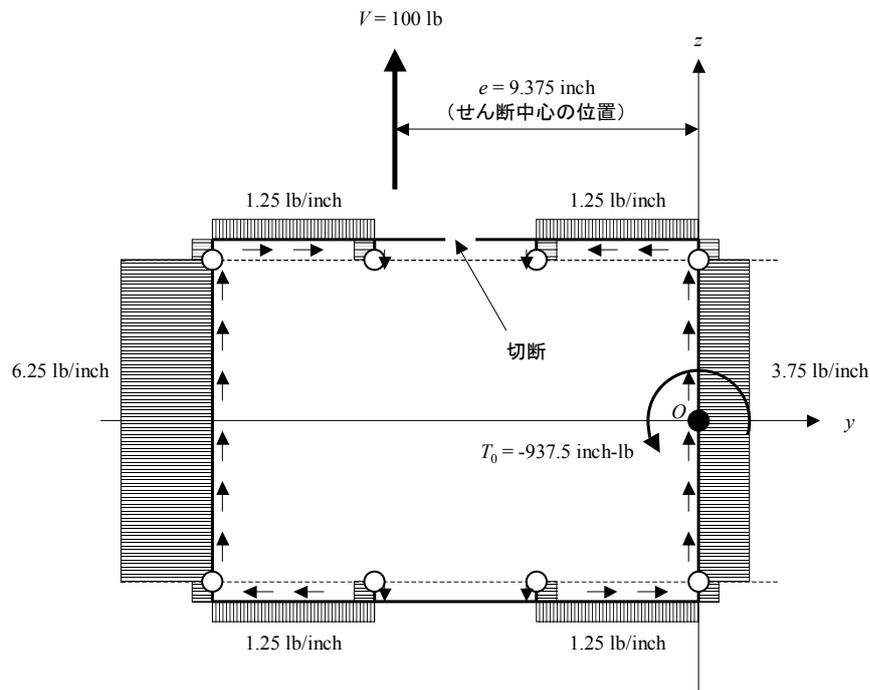


図 4-58 断面の一部を切断したときのせん断流の分布

実際のせん断荷重が O 点まわりに発生するねじりモーメントは、 $T = -100 \text{ lb} \times 7.5 \text{ inch} = -750 \text{ inch-lb}$ であるから、 T_0 との差 $-750 - (-937.5) = 187.5 \text{ inch-lb}$ をトルクボックスのせん断流で補ってやる必要がある (図 4-59)。

$$q_T = \frac{T - T_0}{2A} = \frac{-750 - (-937.5)}{2 \times 11 \times 15} = 0.57 \text{ lb / inch}$$

図 4-58 と図 4-59 を足し合わせた図 4-60 が最終的な結果である。この問題ではせん断力がすべての断面で一定なので、すべての断面でこのせん断流分布となっている。他のリブ位置に集中荷重が入る場合も同じ計算方法でせん断流の分布を計算できる。

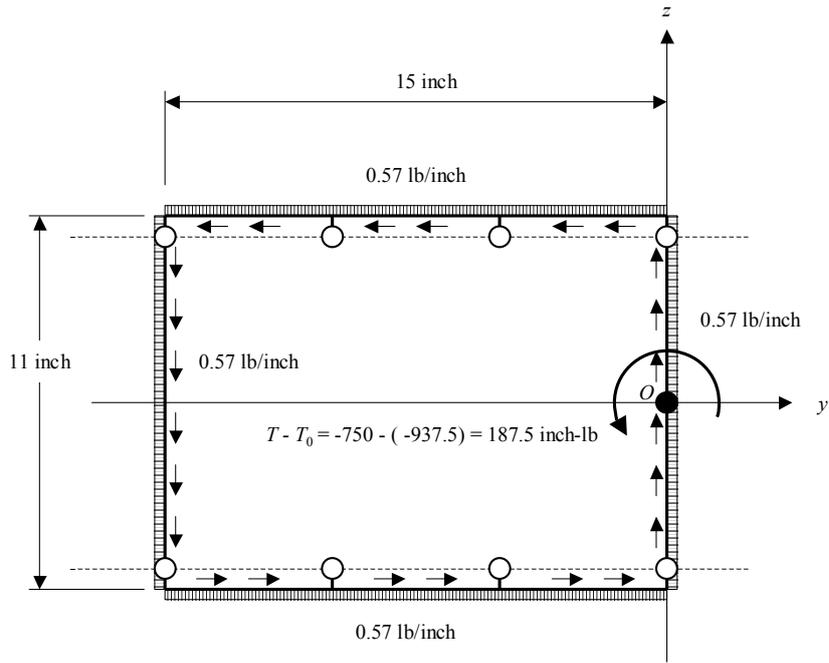


図 4-59 トルクボックスで受け持つねじりモーメントによるせん断流

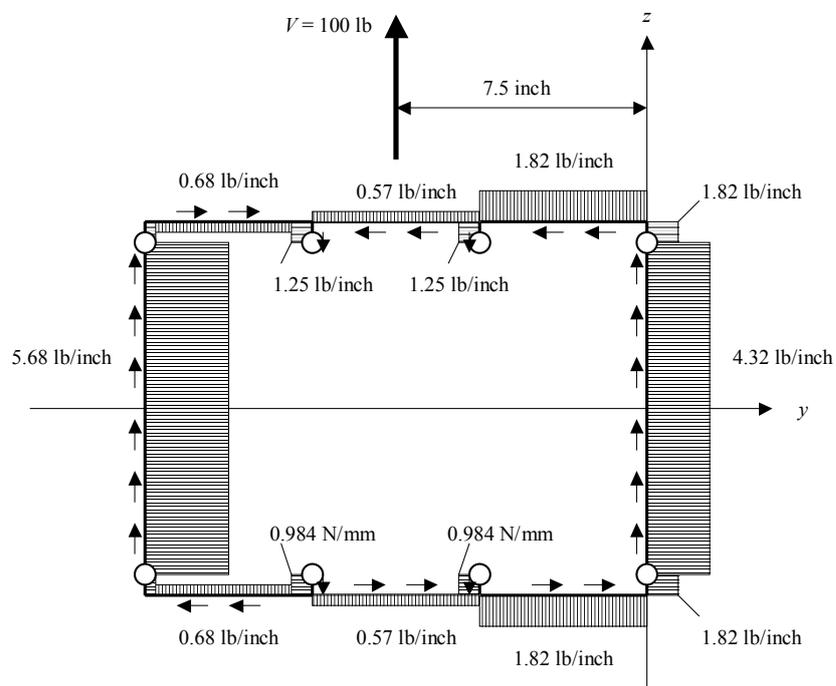


図 4-60 2本桁構造のせん断流の分布

4.5.3 非対称 2 本桁構造の曲げねじり

Bruhn の教科書の A15.8 項に載っている非対称 2 本桁構造の曲げねじりを考える (図 4-61)。前項までと同じように、桁フランジだけが曲げに有効であると、外板とウェブはせん断荷重だけを受け持つとする。

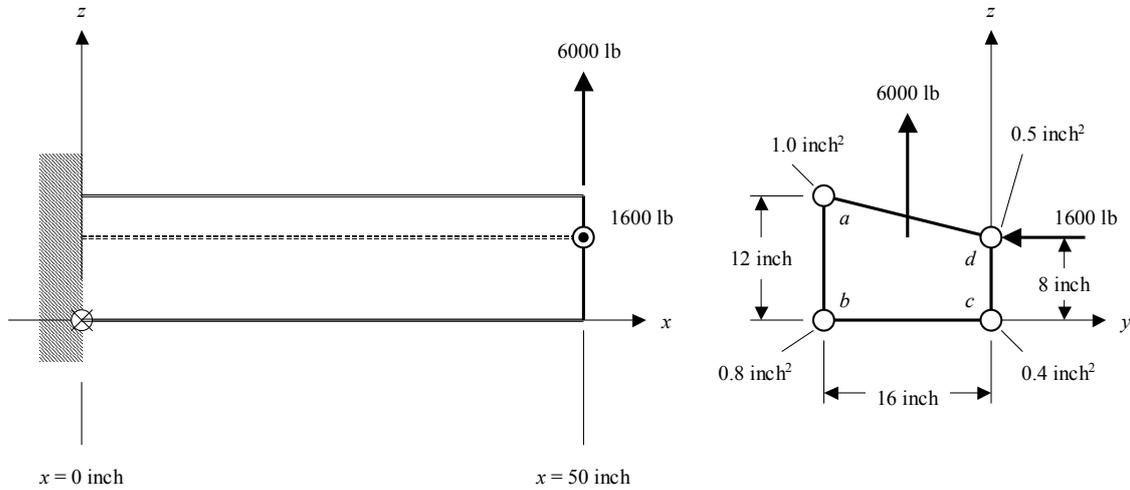


図 4-61 非対称 2 本桁構造の曲げねじり

まず、断面特性 (Section Properties) の計算をおこなう。非対称断面なので、断面の主軸を求める必要がある。断面の主軸の角度と主軸に関する断面 2 次モーメントを計算する式は主応力の計算式 (3.6.1.4 項参照) と相似であり、以下のとおりである。

$$I_{yp} = \frac{1}{2} \left(I_y + I_z + \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \right)$$

$$I_{zp} = \frac{1}{2} \left(I_y + I_z - \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \right)$$

$$\phi = -\frac{1}{2} \text{ATAN} 2 \left(\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \right)$$

主軸座標系に関する座標と力の変換式は図 4-62 を参照して次のように表される。

$$y_p = (y - y_0) \cos \phi + (z - z_0) \sin \phi$$

$$z_p = -(y - y_0) \sin \phi + (z - z_0) \cos \phi$$

$$V_{yp} = V_y \cos \phi + V_z \sin \phi$$

$$V_{zp} = -V_y \sin \phi + V_z \cos \phi$$

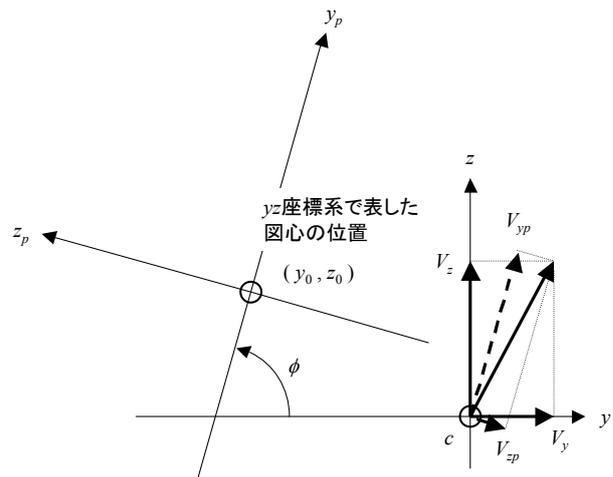


図 4-62 断面の主軸への座標変換

断面特性と主軸の計算結果を表 4-11 と図 4-63 に示す。

表 4-11 非対称 2 本桁構造の断面特性の計算と主軸の計算

element	A (inch ²)	y (inch)	z (inch)	A*y (inch ³)	A*z (inch ³)	A*y ² (inch ⁴)	A*z ² (inch ⁴)	A*y*z (inch ⁴)	yp (inch)	zp (inch)
a	1	-16	12	-16	12	256	144	-192	4.457	6.743
b	0.8	-16	0	-12.8	0	204.8	0	0	-7.120	3.586
c	0.4	0	0	0	0	0	0	0	-2.911	-11.850
d	0.5	0	8	0	4	0	32	0	4.807	-9.745
Sum	2.7	-	-	-28.8	16	460.8	176	-192	-	-

A	=	2.700	inch ²
y_bar	=	-10.667	inch
z_bar	=	5.926	inch
ly	=	81.19	inch ⁴
lz	=	153.60	inch ⁴
lyz	=	-21.33	inch ⁴
lyp	=	159.42	inch ⁴
lzp	=	75.37	inch ⁴
φ	=	1.305	radian
	=	74.7	degree
cos φ	=	0.263086	
sin φ	=	0.9647724	

Vy	=	-1600	lb
Vz	=	6000	lb
y	=	-8	inch
z	=	8	inch
Vyp	=	5368	lb
Vzp	=	3122	lb
yp	=	2.703	inch
zp	=	-2.027	inch

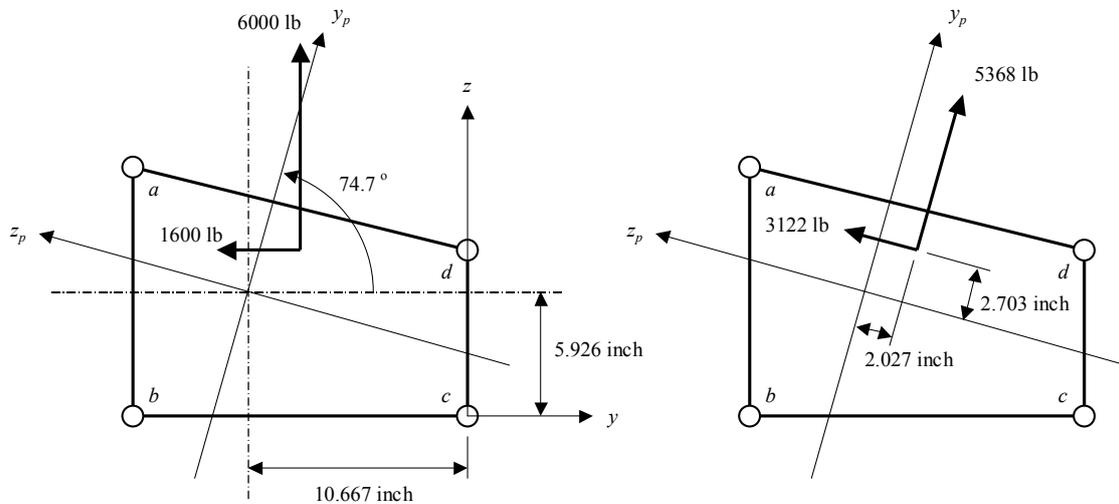


図 4-63 非対称 2 本桁構造の弾性主軸

次に、せん断力の分布を計算する。図 4-64 に示すように、上面外板の中央を切断したとき、主軸方向に分解し

たせん断力成分に関して、 $q_{yp} = \frac{V_{yp}}{I_{zp}} \int_{y_p} y_p dA$ と $q_{zp} = \frac{V_{zp}}{I_{yp}} \int_{z_p} z_p dA$ でせん断力を計算できる。せん断力の計算の

過程を表 4-12 に示した。これらのせん断力を合計した結果を図 4-65 の左上の図に示す。このせん断流に対して c 点まわりのねじりモーメント T_0 を計算すると、次のようになる。

$$T_0 = -449.5 \times 12 \times 16 = -86304 \text{ inch} - \text{lb}$$

実際のせん断荷重が c 点まわりに発生するねじりモーメントは、 $T = -6000 \text{ lb} \times 8 \text{ inch} + 1600 \text{ lb} \times 8 \text{ inch} = -35200$

inch-lb であるから、 T_0 との差 $-35200 - (-86304) = 51104$ inch-lb をトルクボックスのせん断流で補ってやる必要がある (図 4-65 の右上の図)。

$$q_T = \frac{T - T_0}{2A} = \frac{-35200 - (-86304)}{2 \times \frac{1}{2} (12+8) \times 16} = 160 \text{ lb/inch}$$

これらの図を足し合わせた図 4-65 の下の図が最終的な結果である。この問題ではせん断力がすべての断面で一定なので、すべての断面でこのせん断流分布となっている。他のリブ位置に集中荷重が入る場合も同じ計算方法でせん断流の分布を計算できる。

表 4-12 せん断流の計算

element	A (inch ²)	yp (inch)	zp (inch)	A*yp (inch ³)	A*zp (inch ³)	ΣA*yp (inch ³)	ΣA*zp (inch ³)	qyp (lb/inch)	qzp (lb/inch)	q0 (lb/inch)
a	1	4.5	6.7	4	6.74346	0	0	0.0	0.0	0.0
b	0.8	-7.1	3.6	-6	2.86914	4	7	317.4	132.1	449.5
c	0.4	-2.9	-11.8	-1	-4.74	-1	10	-88.3	188.3	100.0
d	0.5	4.8	-9.7	2	-4.8726	-2	5	-171.2	95.4	-75.8
Sum	2.7	-	-	0	0	-	-	-	-	-

Vyp	=	5368	lb
Vzp	=	3122	lb
Iyp	=	159.42	inch ⁴
Izp	=	75.37	inch ⁴

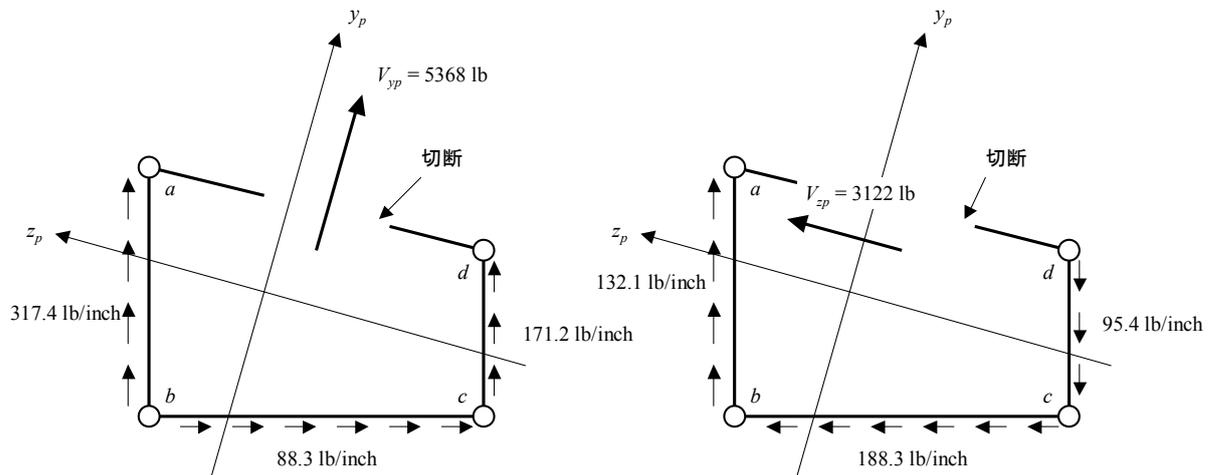
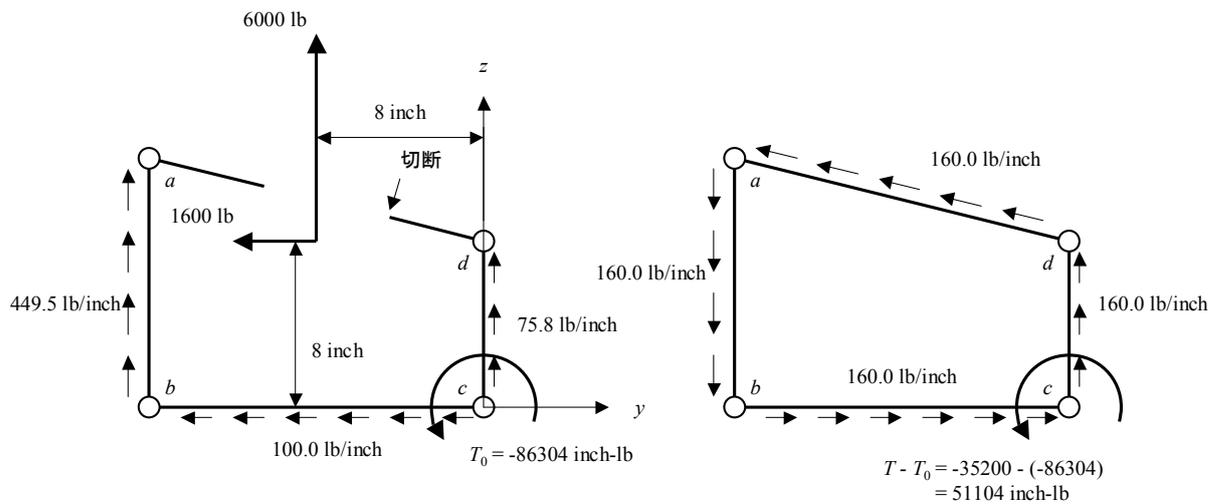
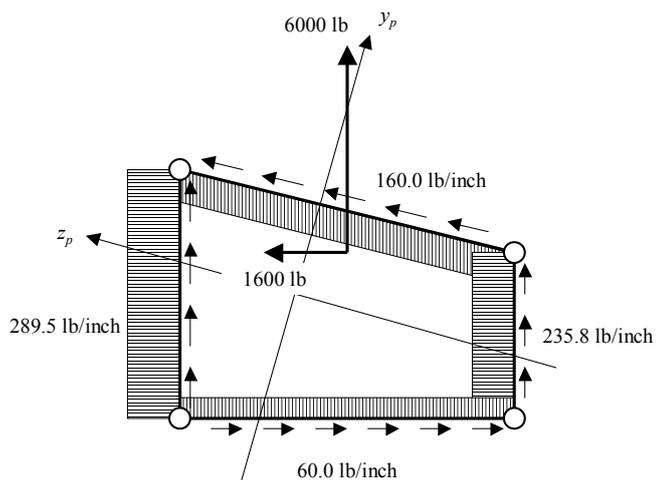


図 4-64 非対称 2 本桁構造のせん断流 - 外板の一部を切断した場合



外板に切断を入れた場合のせん断流

残りのねじりモーメントによるトルクボックスのせん断流



最終結果

図 4-65 非対称 2 本桁構造のせん断流の分布

4.5.4 胴体フレームの荷重

ストリングとフレームと外板で構成される胴体構造も箱桁構造の変形と考えることができる。胴体では断面形状を保つ役割をフレームが担っている。フレームに集中荷重が入ると、フレームはその力を外板にせん断流として分散させる。逆に、外力を受けるフレームを外板が支持しているとみなすことができる。

ここではフレームと外板の釣合いを説明するために、Bruhnの本の Fig. A15-84の問題(図 4-66)を解く。切り欠きのない一定断面の長い胴体のフレーム(Frame)に下向きの荷重が働く問題である。フレームに外荷重が入り、それを外板が支持している。この問題は、せん断荷重が x 軸方向に一定である。荷重を負荷する断面のフレームとその前方のフレームで囲まれるベイを考える。

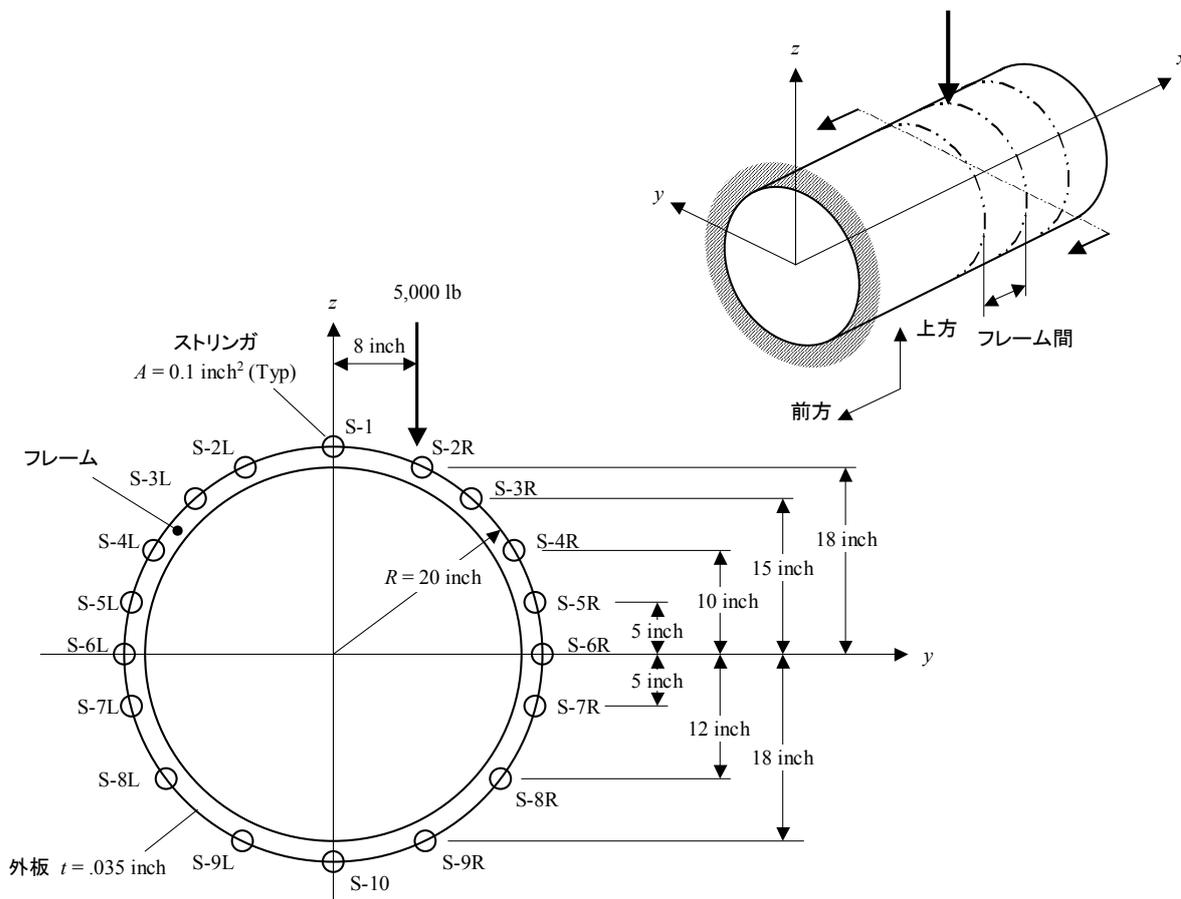


図 4-66 胴体フレームに入る外荷重

まず、胴体の断面特性を求める(表 4-13)。同じ表の中に外板の S-1 と S-2R 間を切断した場合(図 4-67)のせん断流も計算した。このせん断流が基準点 O まわりに作るねじりモーメント T_0 の計算を表 4-14 に示す。一方、外力が基準点 O まわりに作るねじりモーメント T は、 $T = -5000 \text{ lb} \times 8 \text{ inch} = -40000 \text{ inch-lb}$ だから、その差 $-40000 - 37652 = -77652 \text{ inch-lb}$ のねじりモーメントを切断していない胴体の一様なせん断流で受け持つ必要がある。このせん断流を求めると、

$$q' = -\frac{T - T_0}{2A} = -\frac{-40000 - 37652}{2 \times \pi \times 20^2} = 30.90 \text{ lb/inch}$$

これを表 4-13 のせん断流に足し合わせたものが外板のせん断流である(表 4-14)。フレームに働く力の釣り合いを図 4-68 に示す。フレームに入る下向きのせん断荷重を外板のせん断流で支えていることがわかる。これらの力を

からフレームのせん断力分布と曲げモーメント分布を計算でき、それがフレームの内部荷重である。図中でマイナスの数字の場合は、せん断流の向きが図の矢印の向きと逆であることを示す。

表 4-13 断面特性の計算 - 胴体

Element	A (inch ²)	y (inch)	z (mm)	A*y (inch ³)	A*y ² (inch ⁴)	A*z (inch ³)	A*z ² (inch ⁴)	y' (inch)	z' (inch)	A*z' (inch ³)	ΣA*z' (inch ³)	q0 (lb/inch)
S-1	0.1	0	20	0	0	2	40	0	18.5556	1.85555556	0	0.00
S-2L	0.1	-8.7178	18	-0.87178	7.6	1.8	32.4	-8.717798	16.5556	1.65555556	1.85555556	-29.96
S-3L	0.1	-13.2288	15	-1.322876	17.5	1.5	22.5	-13.22876	13.5556	1.35555556	3.51111111	-56.70
S-4L	0.1	-17.3205	10	-1.732051	30	1	10	-17.32051	8.55556	0.85555556	4.86666667	-78.58
S-5L	0.1	-19.3649	5	-1.936492	37.5	0.5	2.5	-19.36492	3.55556	0.35555556	5.72222222	-92.40
S-6L	0.1	-20	0	-2	40	0	0	-20	-1.44444	-0.1444444	6.07777778	-98.14
S-7L	0.1	-19.3649	-5	-1.936492	37.5	-0.5	2.5	-19.36492	-6.44444	-0.6444444	5.93333333	-95.81
S-8L	0.1	-16	-12	-1.6	25.6	-1.2	14.4	-16	-13.4444	-1.3444444	5.28888889	-85.40
S-9L	0.1	-8.7178	-18	-0.87178	7.6	-1.8	32.4	-8.717798	-19.4444	-1.9444444	3.94444444	-63.69
S-10	0.1	0	-20	0	0	-2	40	0	-21.4444	-2.1444444	2	-32.30
S-9R	0.1	8.717798	-18	0.8717798	7.6	-1.8	32.4	8.7177979	-19.4444	-1.9444444	-0.1444444	2.33
S-8R	0.1	16	-12	1.6	25.6	-1.2	14.4	16	-13.4444	-1.3444444	-2.0888889	33.73
S-7R	0.1	19.36492	-5	1.9364917	37.5	-0.5	2.5	19.364917	-6.44444	-0.6444444	-3.4333333	55.44
S-6R	0.1	20	0	2	40	0	0	20	-1.44444	-0.1444444	-4.0777778	65.85
S-5R	0.1	19.36492	5	1.9364917	37.5	0.5	2.5	19.364917	3.55556	0.35555556	-4.2222222	68.18
S-4R	0.1	17.32051	10	1.7320508	30	1	10	17.320508	8.55556	0.85555556	-3.8666667	62.44
S-3R	0.1	13.22876	15	1.3228757	17.5	1.5	22.5	13.228757	13.5556	1.35555556	-3.0111111	48.62
S-2R	0.1	8.717798	18	0.8717798	7.6	1.8	32.4	8.7177979	16.5556	1.65555556	-1.6555556	26.73
Sum	1.8	-	-	0	406.6	2.6	313.4	-	-	-	-	-

A	=	1.8	inch ²
y _{bar}	=	0	inch
z _{bar}	=	1.444444	inch
I _y	=	309.6444	inch ⁴
I _z	=	406.6	inch ⁴

V _z	=	-5000	lb
----------------	---	-------	----

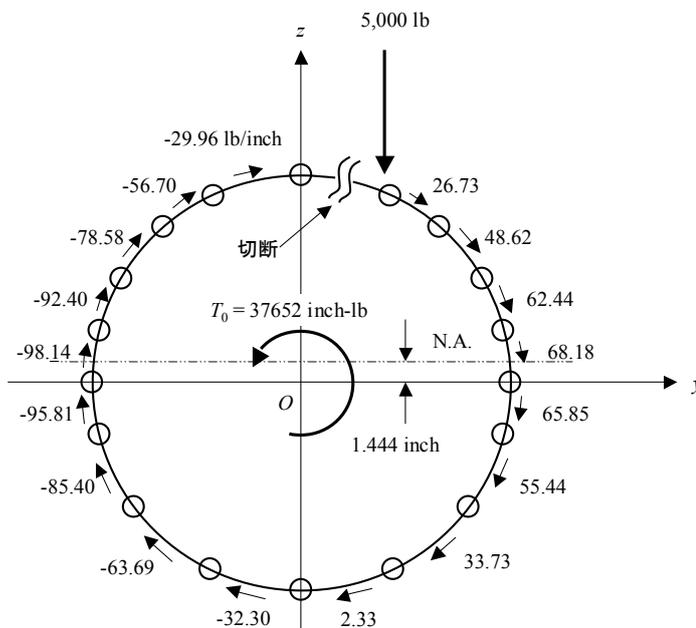


図 4-67 胴体外板のせん断流の計算結果 - 外板を切断した場合

表 4-14 外板のせん断流が作るねじりモーメント T_0 とせん断流の計算

Element	q0 (lb/inch)	Radius (inch)	Angle (radian)	Δ Angle (radian)	Arc Length (inch)	Δ T0 (inch-lb)	q (lb/inch)
S-1	0.00	20.00	1.5708	-	-	-	30.90
S-2L	-29.96	20.00	2.0218	0.4510	9.021	5406	0.93
S-3L	-56.70	20.00	2.2935	0.2717	5.434	6162	-25.80
S-4L	-78.58	20.00	2.6180	0.3245	6.489	10199	-47.69
S-5L	-92.40	20.00	2.8889	0.2709	5.418	10013	-61.50
S-6L	-98.14	20.00	3.1416	0.2527	5.054	9919	-67.24
S-7L	-95.81	20.00	-2.8889	0.2527	5.054	9684	-64.91
S-8L	-85.40	20.00	-2.4981	0.3908	7.816	13351	-54.51
S-9L	-63.69	20.00	-2.0218	0.4763	9.525	12134	-32.80
S-10	-32.30	20.00	-1.5708	0.4510	9.021	5826	-1.40
S-9R	2.33	20.00	-1.1198	0.4510	9.021	-421	33.23
S-8R	33.73	20.00	-0.6435	0.4763	9.525	-6426	64.63
S-7R	55.44	20.00	-0.2527	0.3908	7.816	-8667	86.34
S-6R	65.85	20.00	0.0000	0.2527	5.054	-6655	96.74
S-5R	68.18	20.00	0.2527	0.2527	5.054	-6891	99.08
S-4R	62.44	20.00	0.5236	0.2709	5.418	-6766	93.33
S-3R	48.62	20.00	0.8481	0.3245	6.489	-6310	79.52
S-2R	26.73	20.00	1.1198	0.2717	5.434	-2905	57.63
Sum	-	-	-	-	116.643	37652	-

$T_0 =$	37652	inch-lb
$T =$	-40000	inch-lb
$T-T_0 =$	-77652	inch-lb
$A =$	1256.64	inch ²
$q' =$	30.90	lb/inch

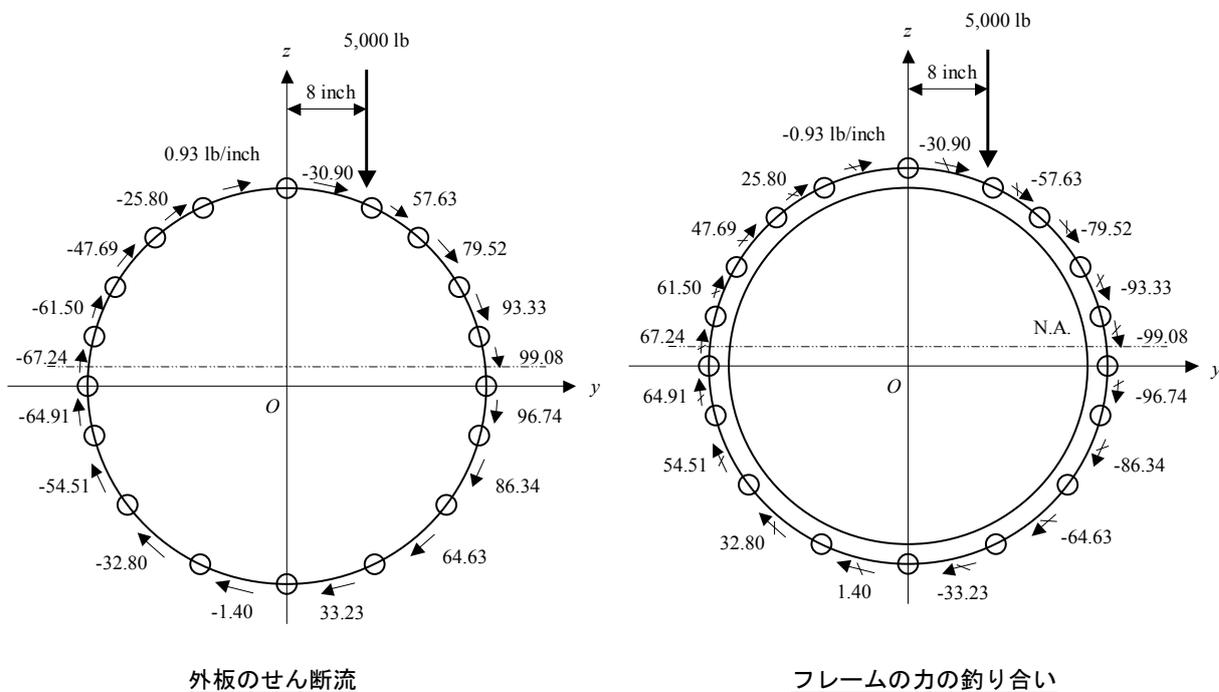
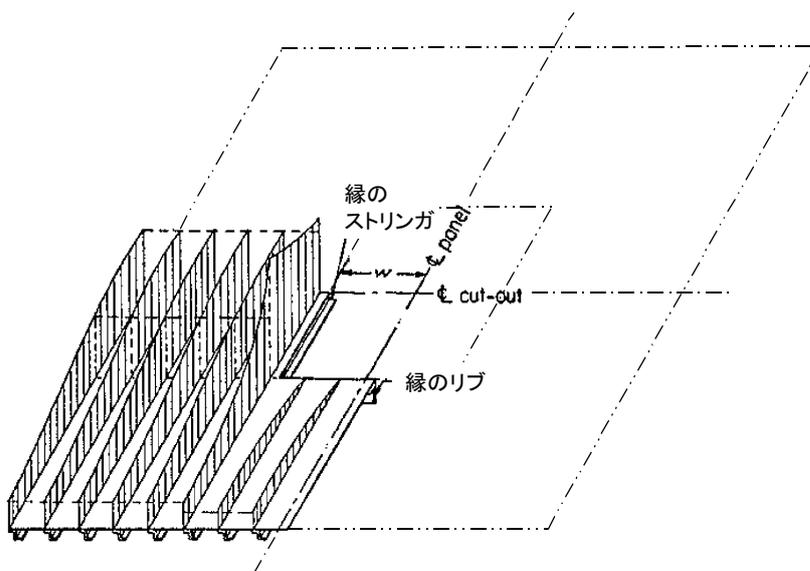


図 4-68 胴体外板のせん断流とフレームの力の釣り合い

4.5.5 梁理論と純ねじり理論の限界

ここまで梁理論と純ねじり理論を使って箱桁構造を解析する方法を説明してきたが、これらの理論を骨組みと薄板からなるセミモノコック構造に適用する場合に限界がある。たとえば次のような場合である。

- あるストリングに集中荷重が入る場合、その荷重が周囲のストリングにはすぐには伝わらない。この現象をせん断遅れ (Shear Lag) と呼ぶ。
- ストリングが構造の切り欠き部で止まっている場合、切り欠き部の周辺のストリングに荷重が集中する。これもせん断遅れの一例である。たとえば、切り欠きのある補強外板に軸力が働く場合を図 4-69 に示す。
- 構造の端が固定されている場合、ワーピングが拘束されるため軸力部材に付加軸力が発生する (図 4-49)。



文献[2-65]より

図 4-69 せん断遅れの例

文献[2-22]に載っている計算例（図 4-70）で説明しよう。8本の軸力部材と外板からなる箱桁構造の片方の端が固定されており、もう一方の端のせん断中心位置に下向きの集中力または集中トルクを負荷する。下向きの集中力を負荷する場合の固定条件は4隅の軸力部材を固定しているとし、集中トルクを負荷する場合の固定条件は全部の軸力部材を固定しているとする。解析においては、外板は軸力を受け持たず、せん断荷重だけを受け持つと仮定する。断面を保持するためのリブが4断面に入っている場合と、リブが無制限枚数入っていると仮定した場合の解析結果を以下に示す。

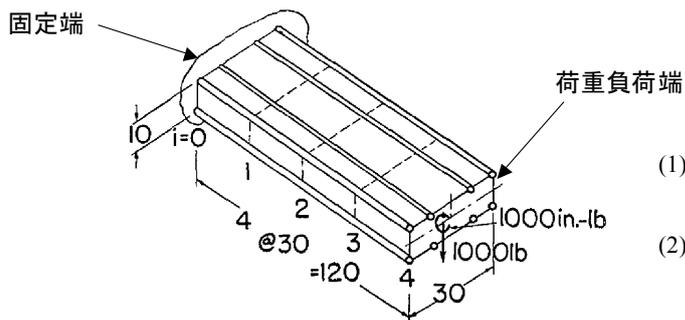
(1) 集中力が働く場合

軸力部材の応力分布を図 4-70 の左下の図に示す。リブの数が4の場合を破線で、リブの数が無限の場合を実線で示す。リブの数による差は小さい。荷重負荷面から3つ目のベイまでは、すべての軸力部材の応力分布は等しいので、梁理論の結果と差がないと言える。しかし、固定端では4隅の軸力部材だけで軸力を受け持つので、中間の軸力部材は固定端で軸力がゼロとなる。このため、最後のベイで軸力部材の軸力分布に大きな差が出ている。この現象は梁理論では解析できない。

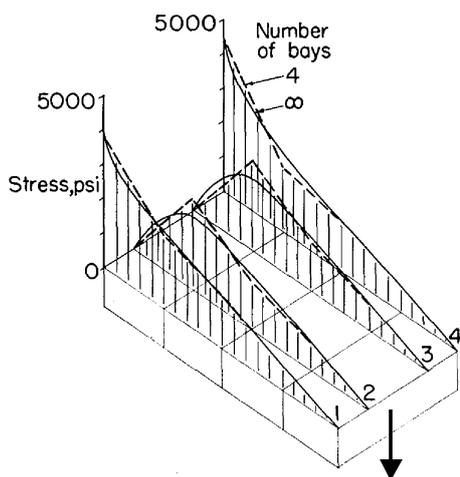
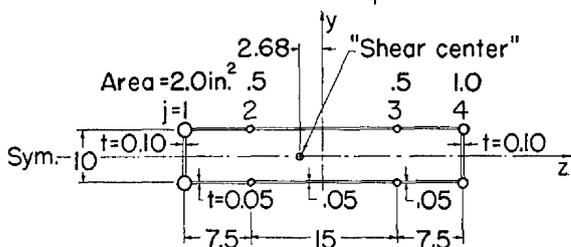
(2) 集中トルクが働く場合

軸力部材の応力分布を図 4-70 の右下の図に示す。リブの数が4の場合を破線で、リブの数が無限の場合を実線で示す。リブの数による差は小さい。純ねじり理論では軸力が発生しないが、この問題では固定端で軸力部材を固定しておりワーピングを拘束しているため、最後のベイで軸力が急増する。荷重負荷面から3ベイの間では軸力が発生せず、純ねじり理論が適用できるが、固定端に近づくにしたがって軸力が増大して純ねじり理論から離れていく。

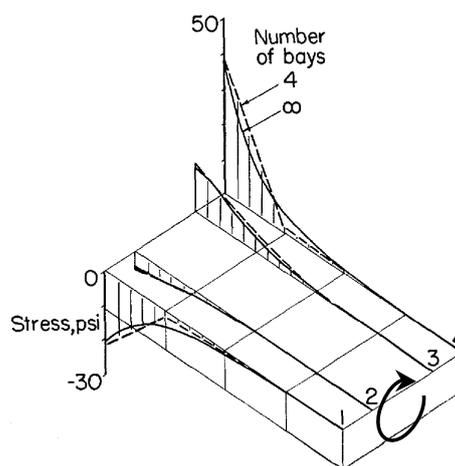
梁理論と純ねじり理論では扱えない薄板構造の問題は4.6項で説明するせん断場理論で解析する必要がある。



- (1) せん断中心に下向きの集中力が働く場合
支持条件：4隅の軸力部材を固定
- (2) せん断中心に集中トルクが働く場合
支持条件：すべての軸力部材を固定



集中力を負荷
4隅の軸力部材を固定



集中トルクを負荷
すべての軸力部材を固定

図 4-70 箱型梁に集中力または集中トルクが働く例

4.6 薄板構造の解析法 – せん断場理論

航空機では、骨組に薄板を張った構造（セミモノコック構造）が多用される。このため、航空機構造の分野では薄板構造を解析する方法が発達してきた。その基本となるのが、せん断場理論（Shear Flow Analysis）である。本項では、せん断場理論とその適用例を説明する。せん断場理論の重要性はいくら強調しても強調しすぎることはない。複雑な航空機構造を有限要素法で解析するにしても、その結果を理解するにはせん断場理論の知識が必須であると言える。せん断場理論をマスターすることが航空機構造技術者の最低条件であると著者は考えている。

4.6.1 せん断場理論とは

せん断場理論の考え方を一言で述べると、「セミモノコック構造を棒（Rod）とせん断パネル（Shear Panel）でモデル化すること」ということになる。

図 4-71 に示す胴体構造を見てみよう。胴体構造（Fuselage Structure）は外板（Skin）、ストリングア（Stringer）とフレーム（Frame）で構成されている。外板は曲げの軸力、せん断力を受け持ち、ストリングアは曲げの軸力を受け持つ。フレームは胴体の断面形状を保つ役割がある。外板は圧縮荷重やせん断荷重を受けて座屈すると、圧縮軸力を受け持つことができなくなるので、せん断荷重だけを受け持つと単純化する。外板が受け持つ軸力はストリングアが余分に受け持っているとみなしてやる。こういう単純化をすると解析が著しく簡単になる。しかもこのモデル化は航空機構造の内部荷重分布をかなり正確に表現することが実証されている。内部荷重は、棒要素（ストリングア）の軸力とせん断パネル（外板）のせん断流である。（4.3.7.3 項で述べたように、薄板のせん断応力は単位幅あたりの値であるせん断流で表すことができる。）したがって、棒とせん断パネルで構成された構造モデルの軸力とせん断流を求めることがせん断場理論の役目である。

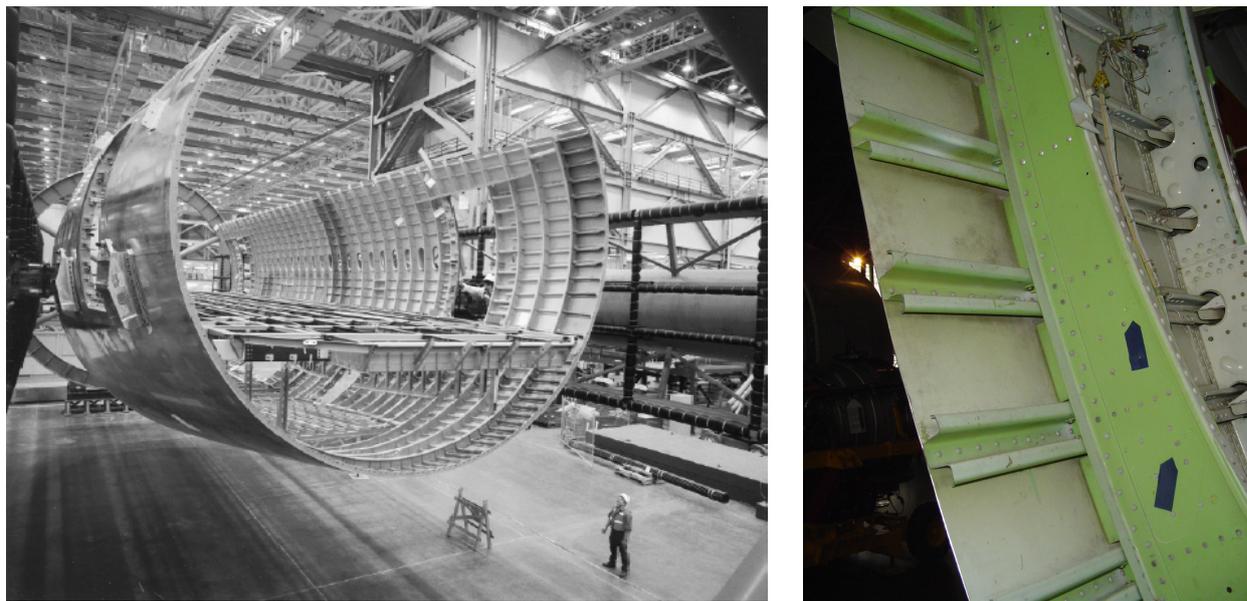


図 4-71 実際の胴体構造 – Boeing 777（左）、Boeing 747 の胴体の一部（右）

4.6.2 集中荷重が入る壁構造

集中荷重を薄い板に直接負荷すると局所的に応力が高くなり、構造として成り立たない。集中荷重を導入するには、金具から軸力部材を通してせん断力で板にせん断流として流してやる（図 4-72）。

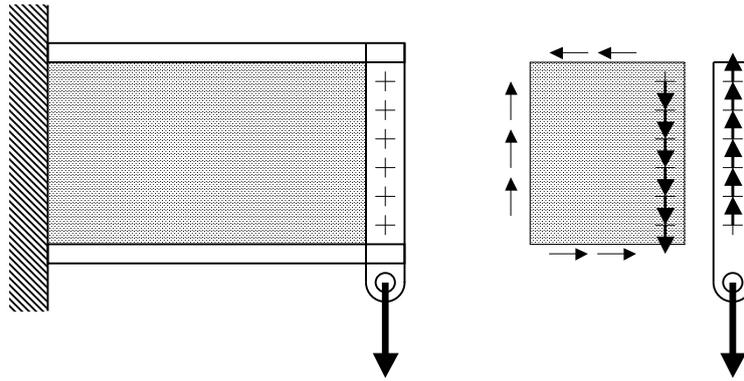


図 4-72 せん断ウェブへの集中荷重の導入

4.6.2.1 壁構造（その1）

壁に集中荷重が入る構造を考えよう。実構造の例として、前脚室の側壁に前脚荷重が入ってくる場合を図 4-73 に示す。前後の隔壁間にある上下方向の軸力部材と下側の軸力部材がその役割を受け持っている。

この構造では、前方隔壁でせん断パネルから伝わる上下荷重だけを支持し、後方隔壁でせん断パネルから伝わる上下荷重と上側の軸力部材から伝わる前後荷重を支持している。このことから、反力を図 4-73 の右図のように描くことができる。

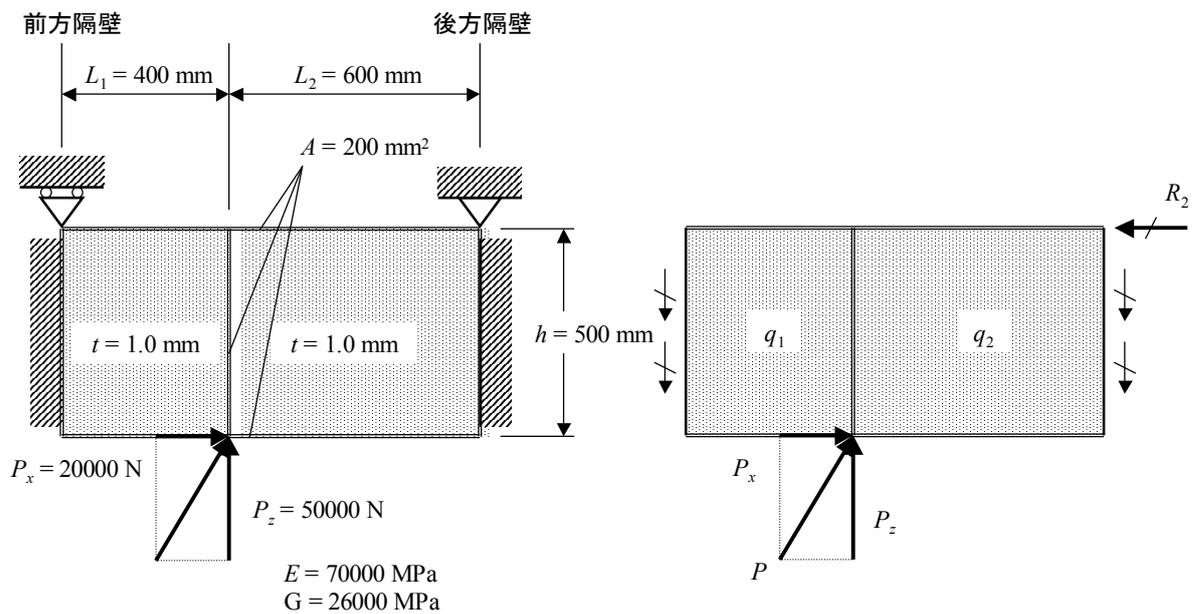


図 4-73 壁に集中荷重が入る構造（その1）

ひとつのせん断パネル内でせん断流が一定であると仮定する。そうすると、棒要素にせん断流が入るため、軸力は線形に変化する。フリーボディ・ダイアグラムを描くと図 4-74 のようになる。

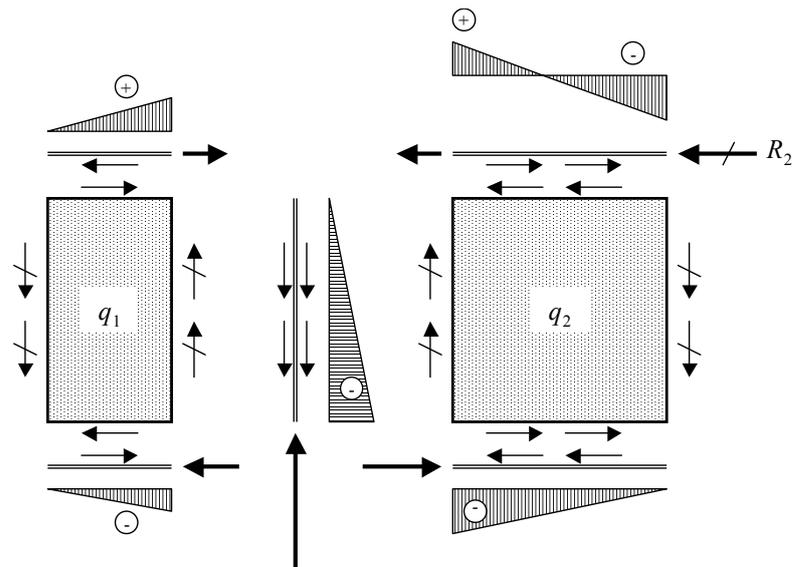


図 4-74 フリーボディ・ダイヤグラム - 壁構造 (その1)

せん断パネルのせん断流と棒要素の軸力を変数として釣り合い式を書くと以下ようになる。

$$\begin{aligned} -R_2 + P_x &= 0 \\ -q_1 h - q_2 h + P_z &= 0 \\ -R_2 h - q_1 h L_1 + q_2 h L_2 &= 0 \end{aligned}$$

この例題の場合には、未知数が3個、釣り合い式が3個であるので、釣り合い式だけで内部荷重が決まる静定構造である。釣り合い式を解いた結果を図 4-75 に示す。

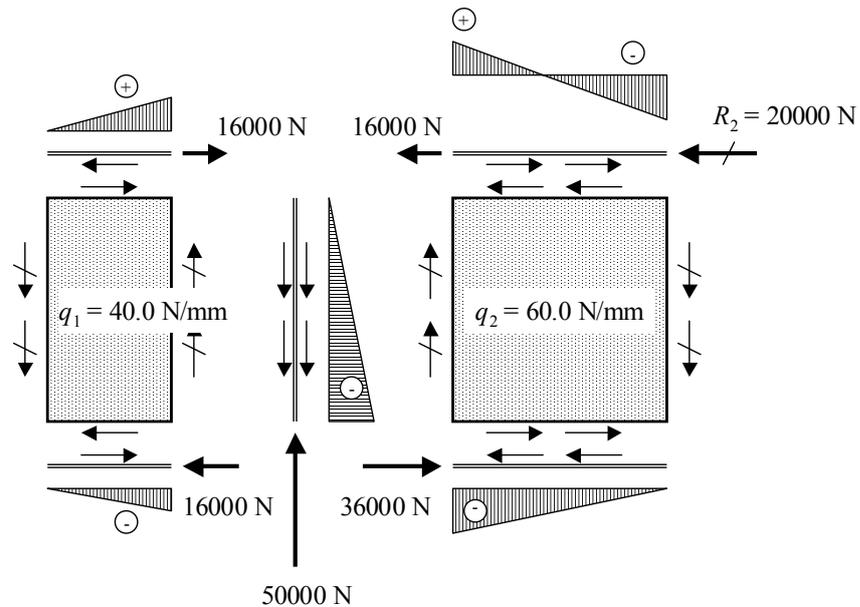


図 4-75 内部荷重 - 壁構造 (その1)

4.6.2.2 壁構造（その2）

前項と同じ構造で、支持方法が異なる場合を考えてみよう（図 4-76）。

$$\begin{aligned} R_1 - R_2 + P_x &= 0 \\ -q_1 h - q_2 h + P_z &= 0 \\ -R_2 h - q_1 h L_1 + q_2 h L_2 &= 0 \end{aligned}$$

この例題の場合には、未知数が4個、釣り合い式が3個であるので、釣り合い式だけで内部荷重が決まらず、不静定問題である。この問題は、コンプリメンタリ・エネルギー最小の原理を適用することによって解くことができる。棒要素の両端の荷重は次のようになるので、3.7.1.2 項の式でコンプリメンタリ・エネルギーが計算できる。

- 下の前方の横部材：前端の荷重 0，後端の荷重 $-q_1 L_1$
- 下の後方の横部材：前端の荷重 $R_1 - q_2 L_2$ ，後端の荷重 R_1
- 上の前方の横部材：前端の荷重 0，後端の荷重 $q_1 L_1$
- 上の後方の横部材：前端の荷重 $q_1 L_1$ ，後端の荷重 $-R_2$
- 縦部材：下端の荷重 $-P_x$ ，上端の荷重 0

せん断パネルのコンプリメンタリ・エネルギーは 3.7.1.3 項の式で表される。

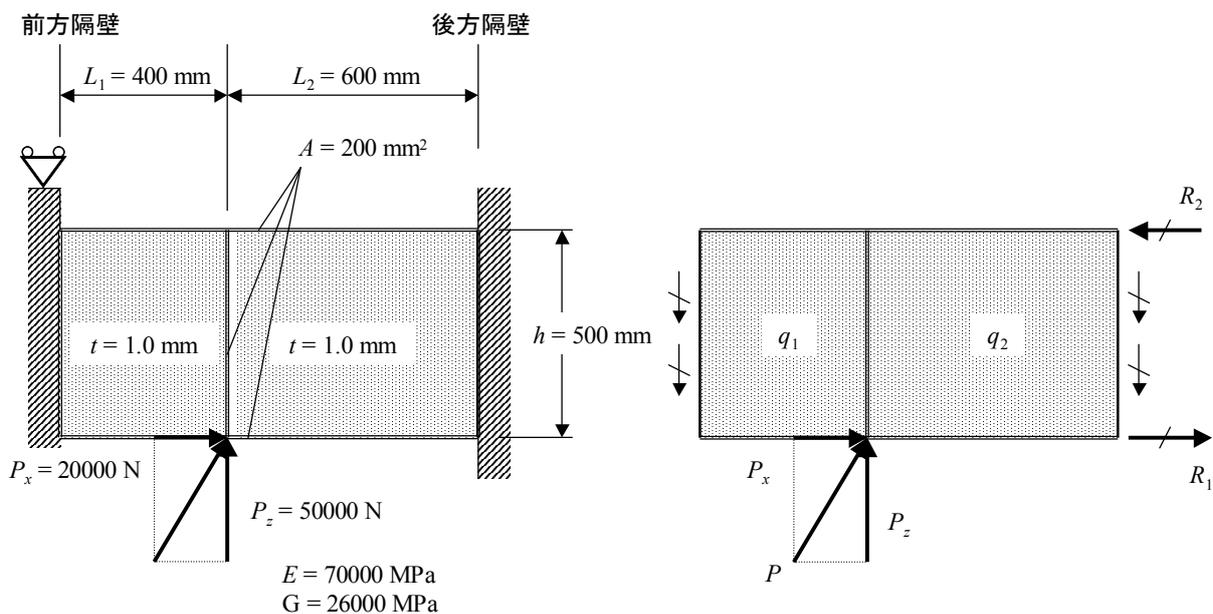


図 4-76 壁に集中荷重がはいる構造（その2）

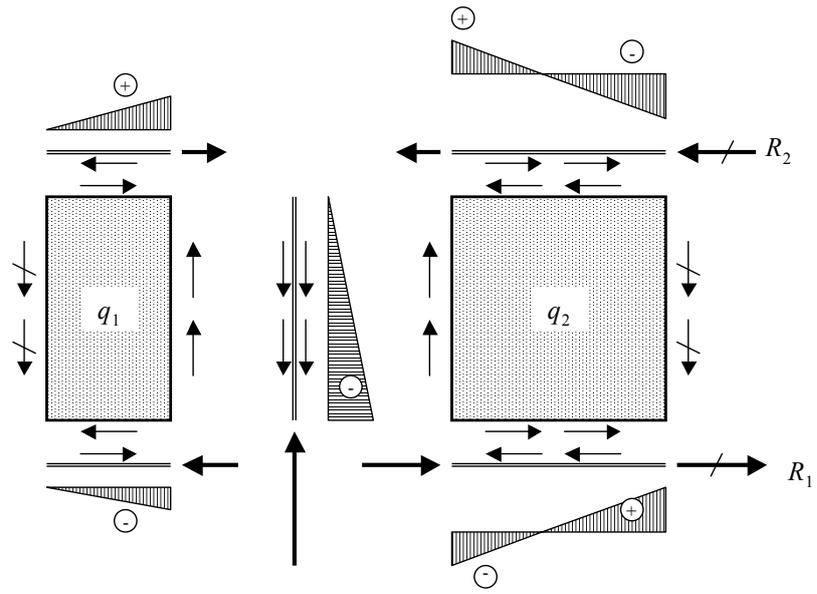


図 4-77 フリーボディ・ダイアグラム - 壁構造 (その2)

表 4-15 コンプリメンタリ・エネルギー最小の原理による解法 – 壁構造 (その2)

コンプリメンタリ・エネルギーの合計	寸法			外力	
Uc (N-mm)	L1 (mm)	L2 (mm)	h (mm)	Px (N)	Pz (N)
55870	400	600	500	20000	50000

↑
最小化

釣り合い式	せん断流		反力		定数	方程式の左辺の合計
	q1 (N/mm)	q2 (N/mm)	R1 (N)	R2 (N)	Constant	Sum
変数	39.06	60.94	942	20942	--	--
x方向の釣り合い	0	0	1	-1	20000	0.00
z方向の釣り合い	-500	-500	0	0	50000	0.00
モーメントの釣り合い	-200000	300000	0	-500	0	0.00

↑
制約条件

軸力部材	ヤング率	断面積	長さ	両端の荷重(引張を正)		コンプリメンタリ・エネルギー
	E (MPa)	A (mm ²)	L (mm)	P1 (N)	P2 (N)	Uc (N-mm)
下前方	70000	200	400	0	-15623	1162
下後方	70000	200	600	-35623	942	8831
上前方	70000	200	400	0	15623	1162
上後方	70000	200	600	15623	-20942	2539
縦	70000	200	500	-50000	0	14881
合計	--	--	--	--	--	28575

せん断パネル	せん断弾性係数	面積	板厚	せん断流	コンプリメンタリ・エネルギー
	G (MPa)	A (mm ²)	t (mm)	q (N/mm)	Uc (N-mm)
パネル1	26000	200000	1	39.06	5867
パネル2	26000	300000	1	60.94	21427
合計	--	--	--	--	27294

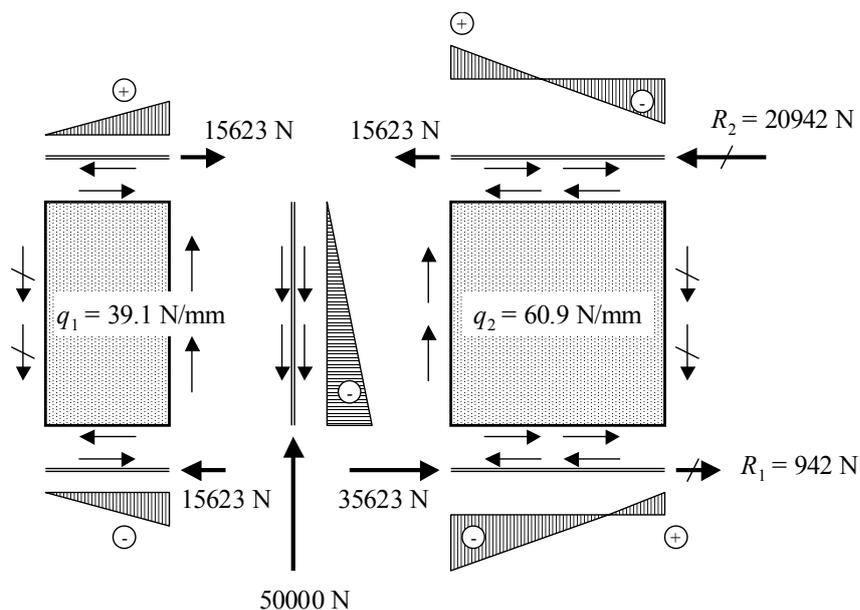


図 4-78 内部荷重 - 壁構造 (その 2)

4.6.2.3 壁構造 (その 3)

図 4-79 に示す構造を考えよう。これは Bruhn の教科書の図 A21.8 の例題である。図 4-80 のフリーボディ・ダイアグラムを参照して、せん断パネルのせん断流と棒要素の軸力を変数として釣り合い式を書くと以下ようになる。この例題の場合には、変数が 5 個、釣り合い式が 5 個であるので、静定構造であり、釣り合い式だけで解ける。この釣り合い式を MS-Excel の「ソルバー」を使って解いた例を表 4-16 に示す。内部荷重を図 4-81 に示す。せん断流 q_3 が負となったので、このせん断流の向きを図 4-80 と反対向きにした。

$$\begin{aligned}
 800 - 10q_2 + 10q_3 &= 0 \\
 -600 + 9q_2 + 3q_3 &= 0 \\
 -1000 + 12q_1 - 9q_2 - 3q_3 &= 0 \\
 30q_1 + 10q_2 - R_2 &= 0 \\
 -30q_1 - 10q_3 + R_1 &= 0
 \end{aligned}$$

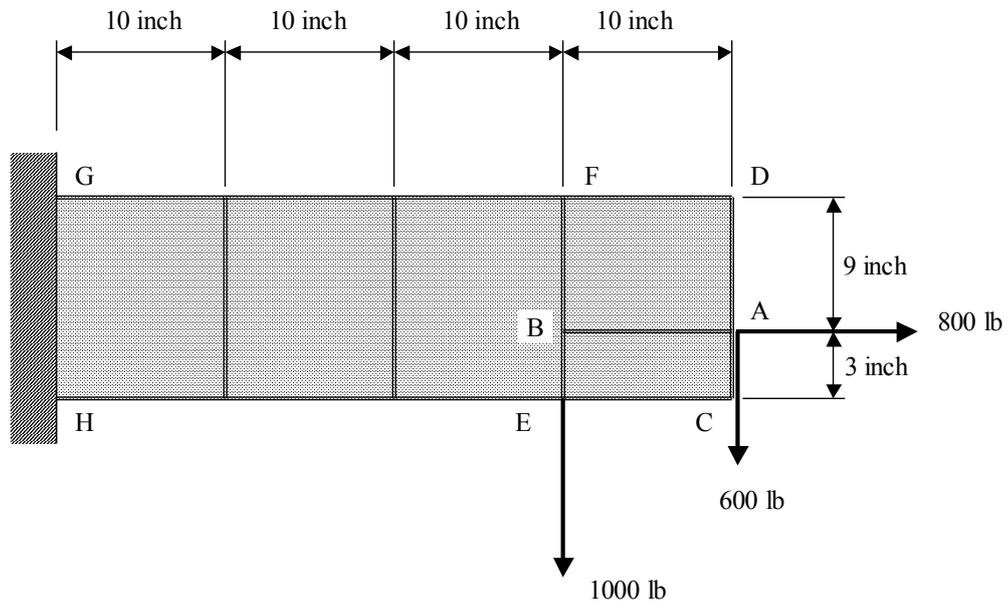


図 4-79 壁構造 (その3)

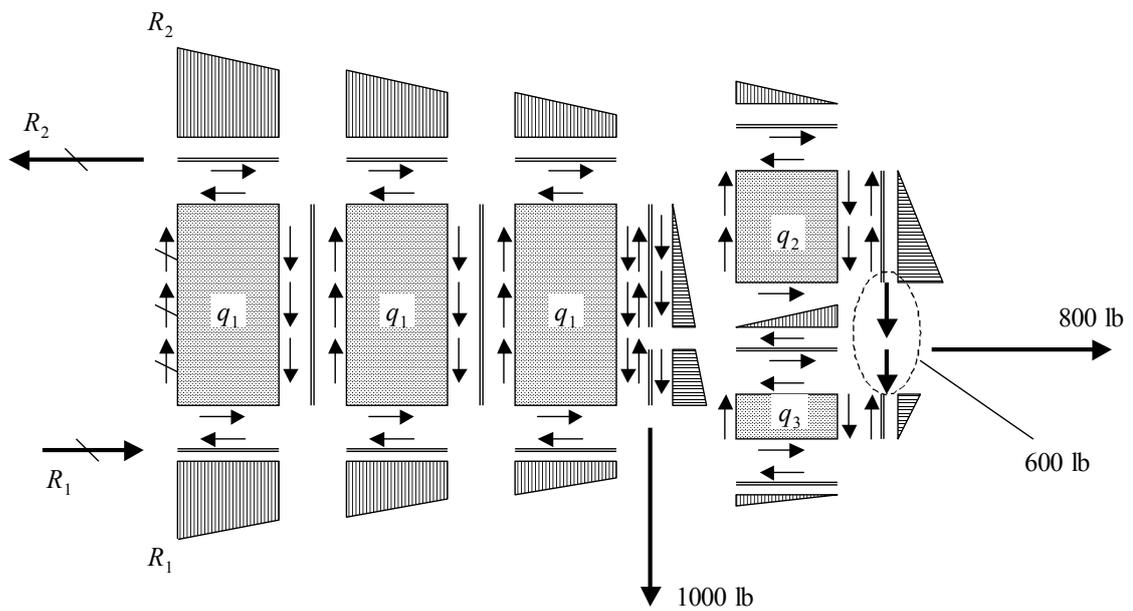


図 4-80 フリーボディ・ダイアグラム - 壁構造 (その3)

表 4-16 「ソルバー」を使った釣り合い式の解法 - 壁構造 (その3)

"Solver"を使った連立方程式の解法

反力		せん断流		
R1	R2	q1	q2	q3
(N)	(N)	(N/mm)	(N/mm)	(N/mm)
3900	4700	133.33	70	-10

←変化させるセル

係数					定数	右辺と左辺の誤差	誤差の2乗
R1	R2	q1	q2	q3	(N)		
			-10	10	800	0.00000	0.00000
			9	3	-600	0.00000	0.00000
		12	-9	-3	-1000	0.00000	0.00000
	-1	30	10		0	0.00000	0.00000
1		-30		-10	0	0.00000	0.00000
合計							0.00000

↑
目的セル

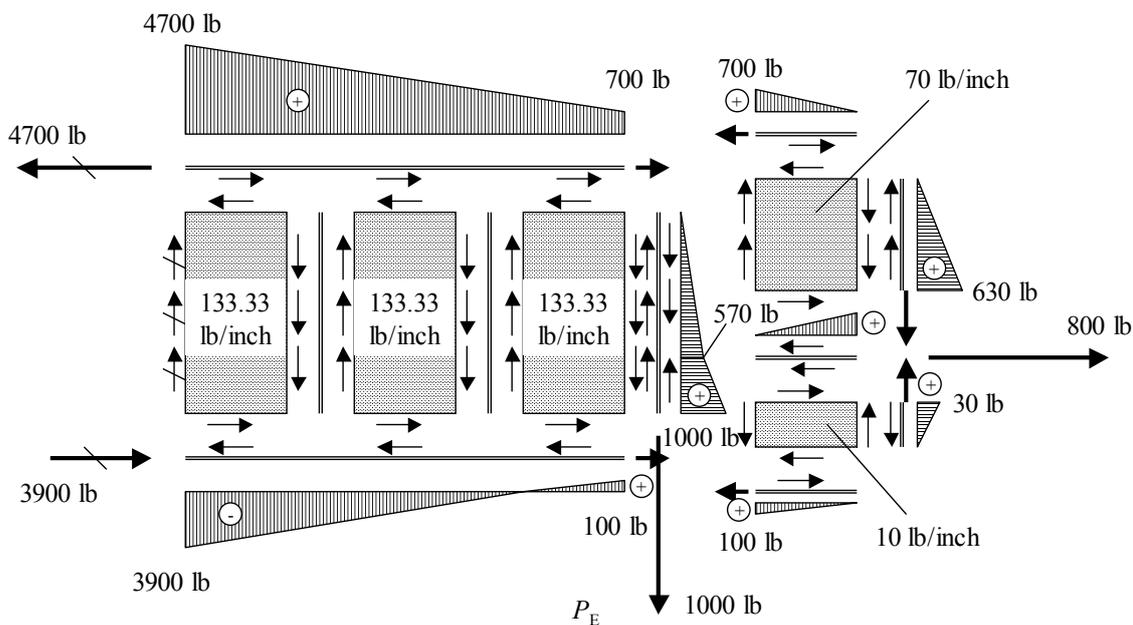


図 4-81 内部荷重の計算結果 - 壁構造 (その3)

4.6.3 台形のせん断パネル

これまでは矩形のせん断パネルを扱ってきたが、実際の構造では矩形ではないせん断パネルが出てくるので、矩形せん断パネルとの違いについて説明する。

一般的な四辺形せん断パネルの各辺のせん断流を表現する式はあるが、簡単ではない。有限要素法でせん断パネル要素 SHEAR (5.2.3.3 項参照) を使って解析するのがふつうである。

実構造ではテーパした構造がよく出てくる。図 4-82 に示す台形のせん断パネルにせん断流がどう働いているかを考えてみよう。Q 点まわりのモーメントの釣り合いを考えると、

$$q_4 a l_a - q_2 b l_b = 0 \quad \text{だから、} \quad q_4 = \frac{b l_b}{a l_a} q_2 = \frac{b^2}{a^2} q_2$$

D 点まわりのモーメントの釣り合いを考えると、

$$q_2 b h - q_1 \frac{h}{\sin \beta} a \sin \beta = 0 \quad \text{だから、} \quad q_2 = \frac{a}{b} q_1$$

A 点まわりのモーメントの釣り合いを考えると、

$$q_2 b h - q_3 \frac{h}{\sin \delta} a \sin \delta = 0 \quad \text{だから、} \quad q_2 = \frac{a}{b} q_3$$

したがって、 $q_1 = q_3$ である。

台形の短辺のせん断流は長辺のせん断流よりも大きいということが重要である。

文献[2-7]によると、台形のせん断パネルのコンプリメンタリ・エネルギーは次の式で表される。

$$U_c = \frac{(a+b)h q_1^2}{2Gt} \left\{ 1 + \frac{2}{3(1+\nu)} (\cot^2 \beta + \cot \beta \cot \delta + \cot^2 \delta) \right\}$$

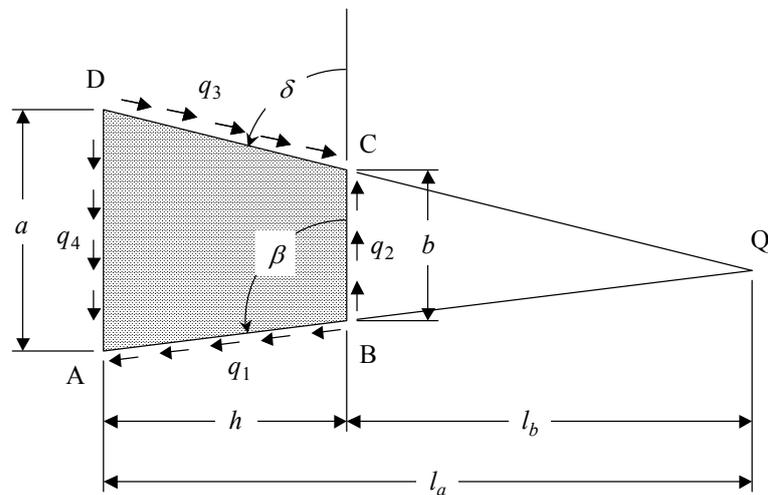


図 4-82 台形のせん断パネル

一般の四辺形のせん断パネルのせん断流とコンプリメンタリ・エネルギーの詳細は文献[2-7]に載っている。

4.6.4 せん断梁

いろいろなせん断梁をせん断場理論で取り扱ってみる。

- 一定高さのせん断梁
- 高さがテーパしたせん断梁
- 切り欠きのあるせん断梁

4.6.4.1 一定高さのせん断梁

実際の構造は図 4-83 に示すような梁である。このような構造はフレーム、床ビーム他、いろいろな場所に登場する。薄肉 I 型断面梁のせん断応力分布の計算はすでに 4.3.7.3 項で説明したのでそれと比較する。

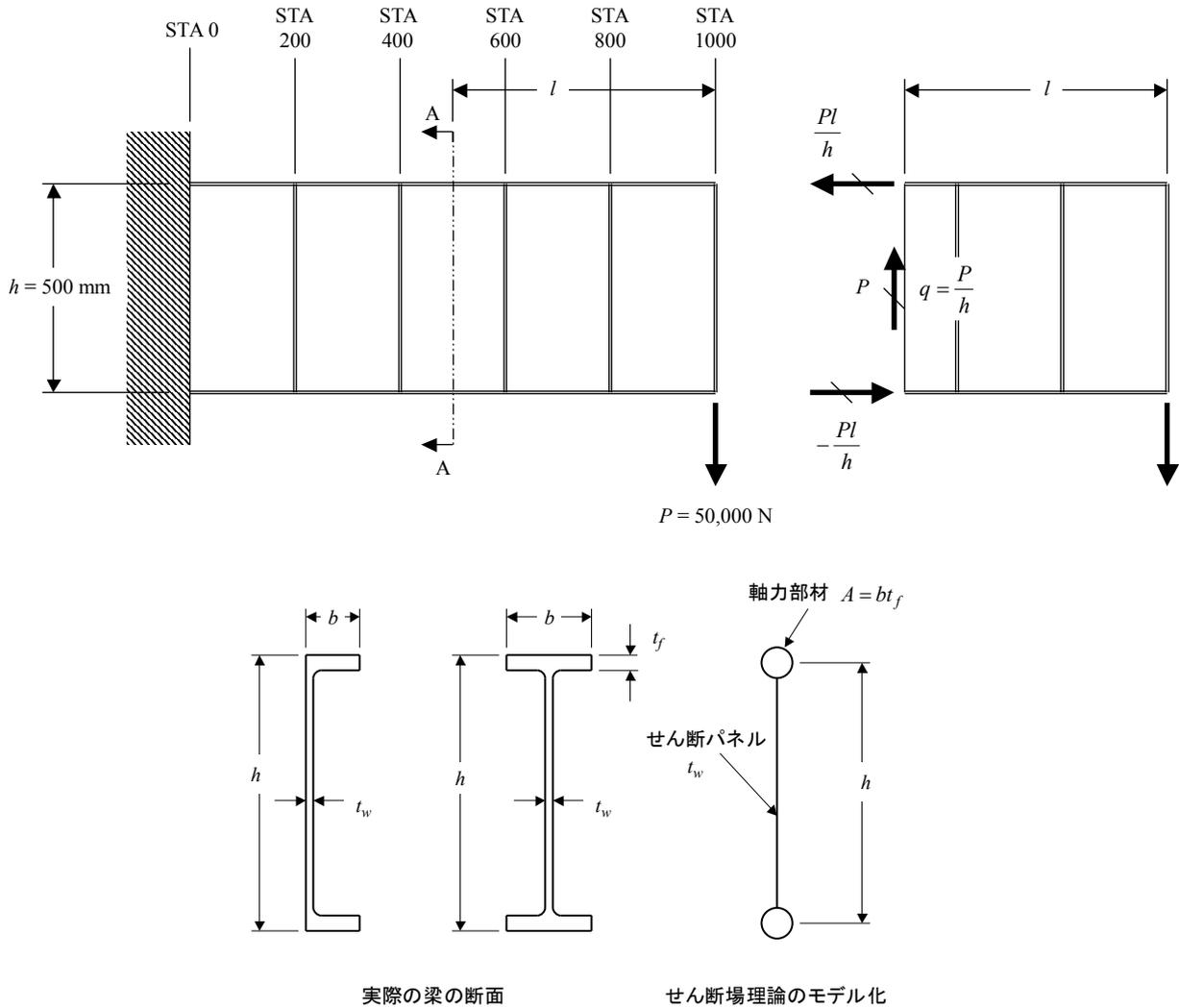


図 4-83 梁のせん断場理論のモデル化

図 4-83 の断面 A-A での力の釣り合いを考えれば、フランジ軸力とウェブせん断流を計算でき、図 4-84 のようになる。4.3.7.6 項で説明した次の式を使ってせん断流を計算することもできる。

$f_s = \frac{P}{It_w} \int_z^{z_1} z dA$ に $I = \frac{Ah^2}{2}$, $\int_z^{z_1} z dA = \frac{Ah}{2}$ を代入すると、ウェブのせん断流は、

$$q = f_s t_w = \frac{P}{t_w} \frac{2}{Ah^2} \frac{Ah}{2} t_w = \frac{P}{h}$$

ウェブのせん断流はすべてのペイで同じである。せん断場理論によると、ウェブは曲げによる軸力を受け持たないので、せん断流はウェブ内で一定である。一方、4.3.7.3 項で説明した梁理論ではウェブも軸力を受け持つとしているので、ウェブ内のせん断流は一定ではなく中央で最大となる分布をする(図 4-85)。ウェブが座屈しない場合は、梁理論のほうが実際に近いと考えられるが、ウェブが座屈する場合には、せん断場理論に近くなる。

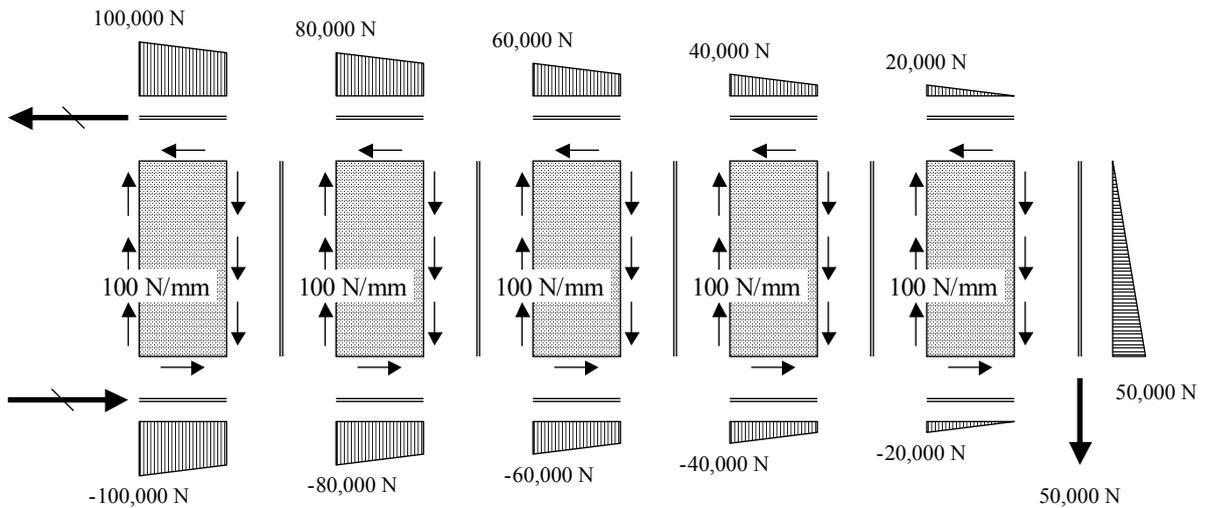


図 4-84 せん断場理論による一定高さの片持ちせん断梁の内部荷重分布

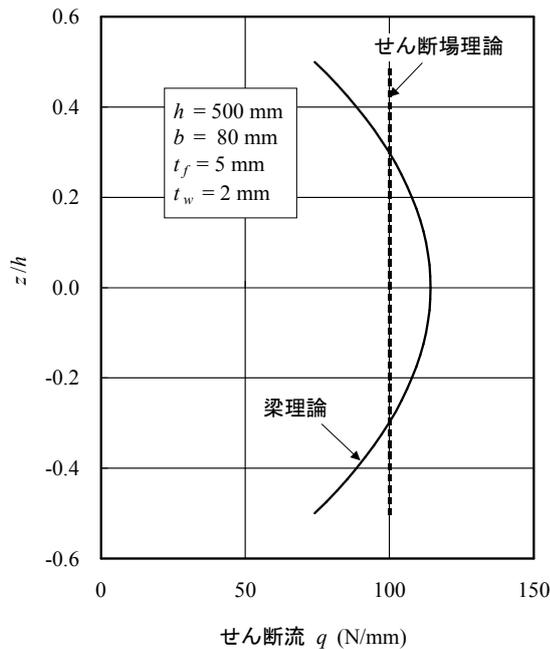


図 4-85 断面 A-A 内のウェブせん断流分布の比較

4.6.4.2 高さがテーパしたせん断梁

図 4-86 に示す高さがテーパした梁に下向きの荷重が負荷される場合を考える。荷重端から l 離れた断面における上下のフランジの軸力はモーメントの釣り合いから $\frac{Pl}{h \cos \alpha}$ であることがわかる。したがって、せん断力 V は

P からフランジ軸力の上下成分を引いたものになり、

$$V = P - \frac{2Pl}{h \cos \alpha} \sin \alpha = \frac{h - 2l \tan \alpha}{h} P = \frac{h_2}{h} P$$

であり、せん断流 q は、

$$q = \frac{V}{h} = \frac{h_2 P}{h^2} = \frac{h_2^2}{h^2} \frac{P}{h_2} = \frac{h_2^2}{h^2} q_2$$

となる。この式は 4.6.3 項の式と同じである。フランジの軸力が上下荷重の一部を受け持つため、ウェブが受け持つせん断荷重が減ることがわかる。

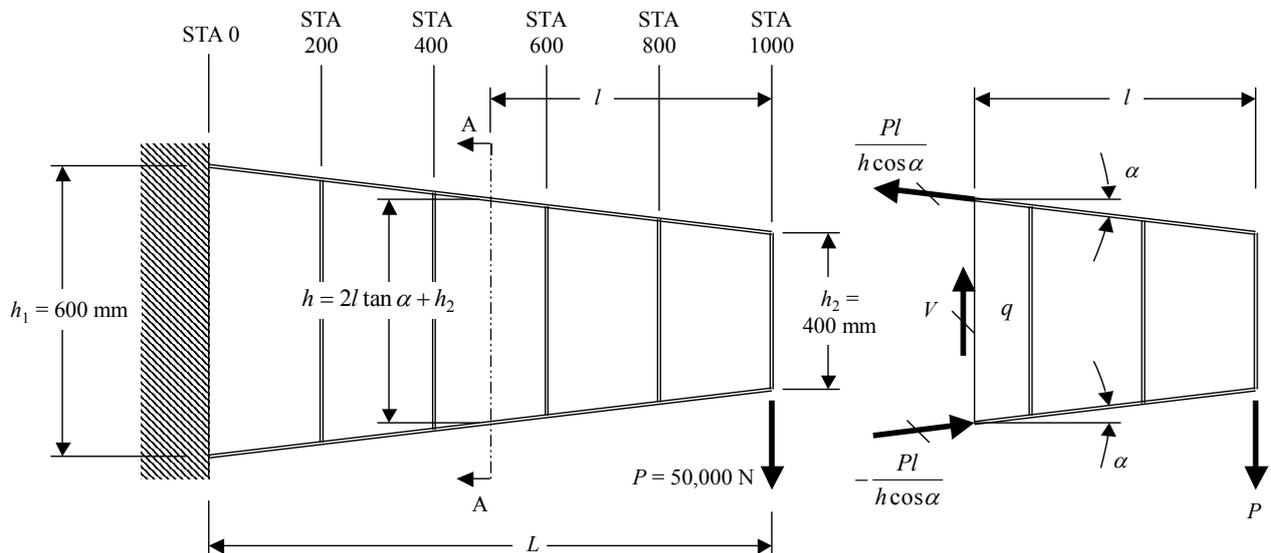


図 4-86 高さがテーパしたせん断梁

4.6.4.3 切り欠きのあるせん断梁

図 4-87 に示す切り欠き (Cut-out) のあるせん断梁の内部荷重を考える。胴体の外板にあいた窓の切り欠きがこのような構造の例である。図 4-88 にフリーボディ・ダイヤグラムを示す。このフリーボディ・ダイヤグラムでは、軸力部材に働く荷重が引張として描いてある。この問題は不静定であるので、全コンプリメンタリ・エネルギー最小の原理を使って解く。表 4-17 に MS-Excel の「ソルバー」を使って解いた結果を示す。図 4-89 にウェブのせん断流の計算結果を示す。この結果から、切り欠きの角のパネルのせん断流が減って、切り欠きの隣のパネルのせん断流が増えることがわかる。せん断流が隣り合うパネルで異なることから、パネルを区切る軸力部材に軸力が発生し、隣り合うパネルのせん断流の差が大きいほど軸力が大きくなる。この構造は不静定であるから、軸力部材の断面積やパネルの板厚が変わると内部荷重 (ウェブのせん断流) が変わる。

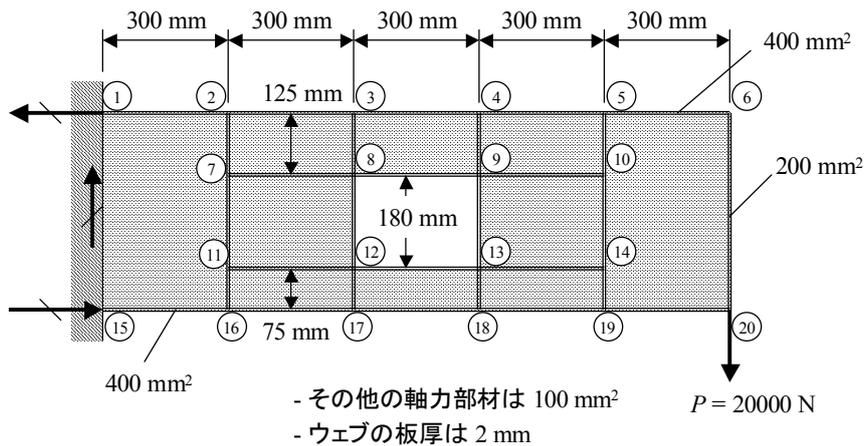


図 4-87 切り欠きのあるせん断梁

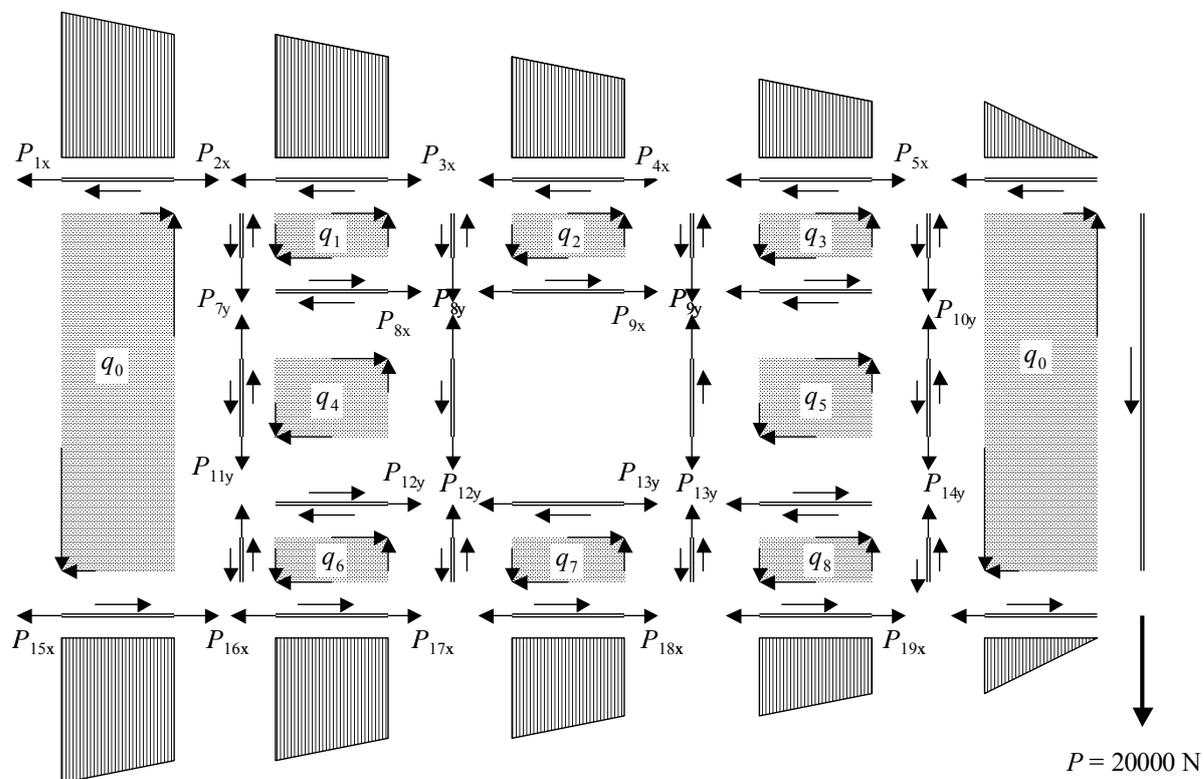


図 4-88 切り欠きのある梁のフリーボディ・ダイヤグラム

表 4-17 切り欠きのあるせん断梁の解法 - 全コンプリメンタリ・エネルギー最小の原理

ウェーブに切り欠きのあるせん断梁の計算

外力と全コンプリメンタリ・エネルギー

Px	0	N
Py	-20000	N
Uc	116798	N・mm

変化させるセル
制約条件

目的セル(最小にする)

	Rod [1-2]	Rod [2-3]	Rod [3-4]	Rod [4-5]	Rod [5-6]	Rod [7-8]	Rod [8-9]	Rod [9-10]	Rod [11-12]	Rod [12-13]	Rod [13-14]	Rod [15-16]	Rod [16-17]	Rod [17-18]	Rod [18-19]	Rod [19-20]	Rod [2-7]	Rod [3-8]	Rod [4-9]	Rod [5-10]	Rod [6-20]	Rod [7-11]	Rod [8-12]	Rod [9-13]	Rod [10-14]	Rod [11-16]	Rod [12-17]	Rod [13-18]	Rod [14-19]		
P1x	78947	-1																													
P1y	0																														
P2x	63158	1	-1														1														
P2y	0																														
P3x	53935	1	-1																												
P3y	0																														
P4x	22296		1	-1																											
P4y	0																														
P5x	15788		1	-1																											
P5y	0																														
P6x	0																														
P6y	0																														
P7x	0																														
P7y	2736																														
P8x	-12040																														
P8y	9340																														
P9x	19600																														
P9y	10472																														
P10x	0																														
P10y	-3868																														
P11x	0																														
P11y	-547																														
P12x	7663																														
P12y	3417																														
P13x	-19605																														
P13y	-5192																														
P14x	0																														
P14y	2322																														
P15x	-78947																														
P16x	63158																														
P16y	0																														
P17x	-49558																														
P17y	0																														
P18x	-22290																														
P18y	0																														
P19x	-15789																														
P19y	0																														
P20x	0																														
P20y	20000																														
q0	-52.6	-300			-300																										
q1	-30.7		-300			300																									
q2	-105.5			-300			300																								
q3	-21.7																														
q4	-70.9																														
q5	-87.0																														
q6	-45.3																														
q7	-90.9																														
q8	-21.7																														
Sum	...	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	

表 4-17 切り欠きのあるせん断梁の解法 - 全コンプリメンタリ・エネルギー最小の原理 (つづき)

軸材断材のコンプリメンタリ・エネルギーの計算

Rod	A (mm ²)	E (MPa)	L (mm)	P1 (N)	P2 (N)	Uc (N-mm)
[1-2]	400	70000	300	78947	63158	27157
[2-3]	400	70000	300	63158	53935	18401
[3-4]	400	70000	300	53935	22296	8230
[4-5]	400	70000	300	22286	15789	1962
[5-6]	400	70000	300	15789	0	445
[7-8]	100	70000	300	0	-12040	1035
[8-9]	100	70000	300	-12040	19600	2094
[9-10]	100	70000	300	19600	0	2744
[11-12]	100	70000	300	0	7663	419
[12-13]	100	70000	300	7663	-19605	2092
[13-14]	100	70000	300	-19605	0	2745
[15-16]	400	70000	300	-78947	63158	-17098
[16-17]	400	70000	300	-63158	-49558	-17098
[17-18]	400	70000	300	-49558	-22290	-7246
[18-19]	400	70000	300	-22290	-15789	-1961
[19-20]	400	70000	300	-15789	0	-445
[2-7]	100	70000	125	0	2736	22
[3-8]	100	70000	125	0	-9340	260
[4-9]	100	70000	125	0	10472	326
[5-10]	100	70000	125	0	-3868	45
[6-20]	200	70000	380	0	20000	1810
[7-11]	100	70000	180	2736	-547	27
[8-12]	100	70000	180	-9340	3417	287
[9-13]	100	70000	180	10472	-5192	352
[10-14]	100	70000	180	-3868	2322	49
[11-16]	100	70000	75	-547	0	1
[12-17]	100	70000	75	3417	0	21
[13-18]	100	70000	75	-5192	0	48
[14-19]	100	70000	75	2322	0	10
Sum	--	--	--	--	--	97330

せん断パネルのコンプリメンタリ・エネルギーの計算

Panel	G (MPa)	a (mm)	b (mm)	t (mm)	q (N/mm)	Uc (N-mm)	
[0]	q0	26000	380	300	2	-52.6	3036
[1]	q1	26000	125	300	2	-30.7	341
[2]	q2	26000	125	300	2	-105.5	4011
[3]	q3	26000	125	300	2	-21.7	170
[4]	q4	26000	180	300	2	-70.9	2608
[5]	q5	26000	180	300	2	-87.0	3932
[6]	q6	26000	75	300	2	-45.3	445
[7]	q7	26000	75	300	2	-90.9	1787
[8]	q8	26000	75	300	2	-21.7	102
[9]	q9	26000	380	300	2	-52.6	3036
Sum	--	--	--	--	--	--	19467

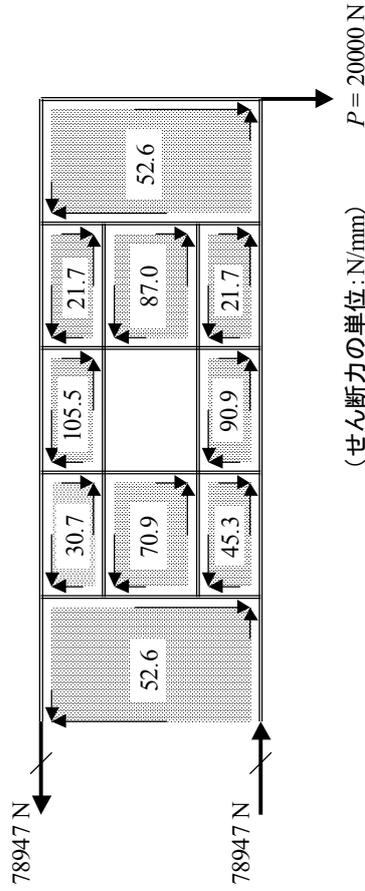
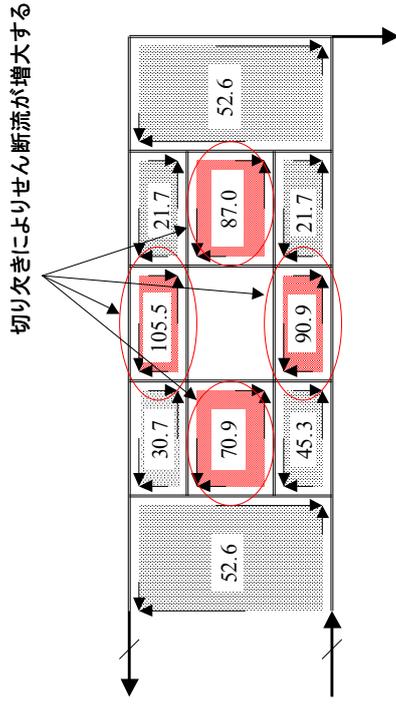


図 4-89 ウェブのせん断流 - 切り欠きのあるせん断梁

同じ問題を Bruhn の本の方法（教科書[1-4]の p.D3.7）で解く。この方法では、いくつかの仮定を用いて、不静定構造を静定として力の釣り合いだけで解いている。切り欠きがない構造で、2種類の荷重ケースを考える。まず、外力が負荷されているとき、すべてのウェブのせん断流は一樣であり、これを q_0 とする（図 4-90 の(a)）。

$$q_0 = \frac{20000}{380} = 52.6 \text{ N/mm}$$

次に、外力を負荷せず、切り欠きのベイに反対向きのせん断流 $-q_0$ を負荷した自己平衡系の内部荷重状態を考える（図 4-90 の(b)）。解はこの2つのケース、(a)と(b)の重ね合わせとなる。(b)を解くために、次の3つの仮定をおく。

- ① 切り欠きの上下のベイのせん断流は同じ値 q_1 である。
- ② 切り欠きの左右のベイのせん断流は同じ値 q_2 である。
- ③ 切り欠きの対角のベイのせん断流は同じ値 q_3 である。

この仮定のもとでは、(b)の内部荷重は釣り合い式だけで解ける。すなわち、 q_1 については、図中の断面 A-A の上下方向の力の釣り合いから、

$$180q_0 + (125 + 75)q_1 = 0$$

$$q_1 = -\frac{180}{200}q_0 = -\frac{9}{10}q_0 = -\frac{9}{10} \times 52.6 = -47.4 \text{ N/mm}$$

q_2 については、図中の断面 B-B の左右方向の力の釣り合いから、

$$300q_0 + (300 + 300)q_2 = 0$$

$$q_2 = -\frac{300}{600}q_0 = -\frac{1}{2}q_0 = -\frac{1}{2} \times 52.6 = -26.3 \text{ N/mm}$$

となる。

q_3 は、図中の断面 C-C の上下方向の力の釣り合いから、

$$180q_2 + (125 + 75)q_3 = 0$$

$$q_3 = -\frac{180}{200}q_2 = -\frac{9}{10}q_2 = \frac{9}{10} \times 26.3 = 23.7 \text{ N/mm}$$

(a)と(b)を足し合わせたものが最終的な答え(c)である。軸力部材の荷重もせん断流から計算できる。せん断流の分布をエネルギー法で解いた結果（図 4-89）と比べてみると、分布の傾向はほぼ一致している。

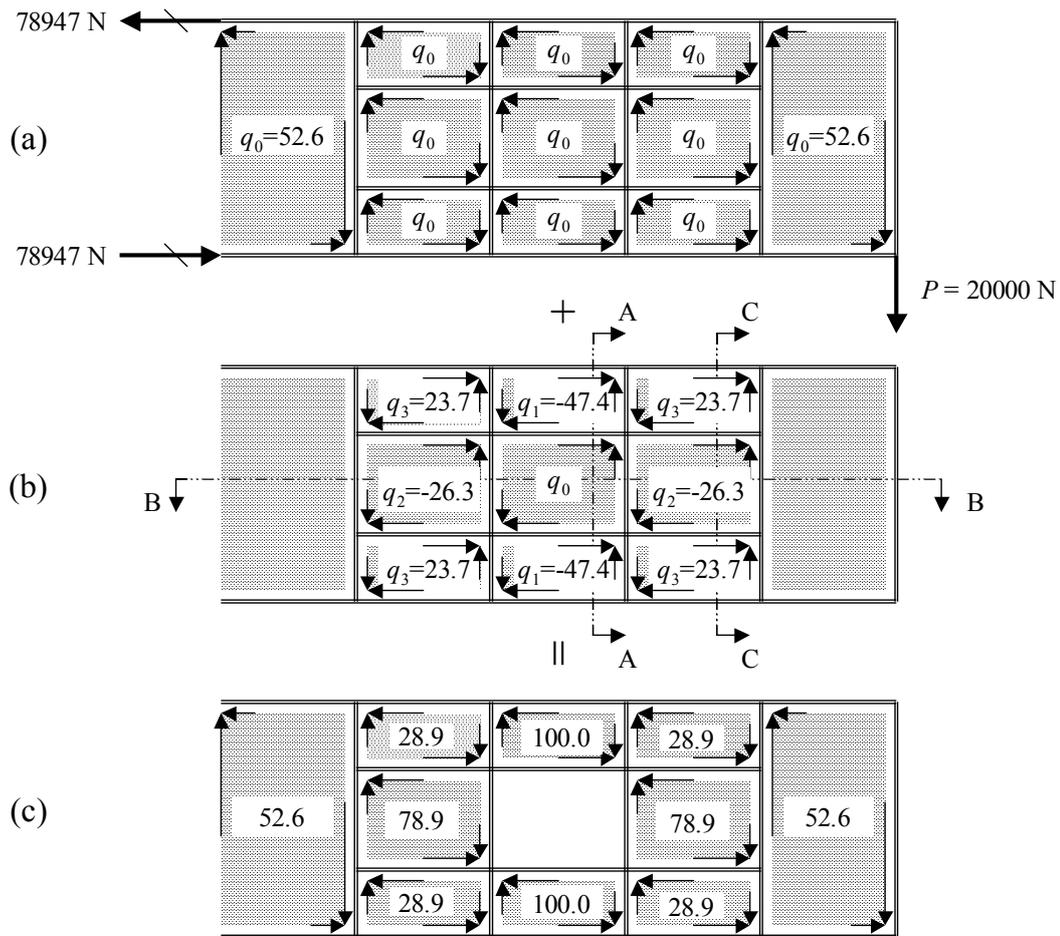


図 4-90 Bruhn の本の方法で解いた切り欠きのあるせん断梁

4.6.5 切り欠きのある2本桁構造のねじり

Bruhn の本の A21.8 項に載っている対称2本桁構造のねじりを考える (図 4-91)。この2本桁構造の上面外板のうち、中央のベイの外板が切り欠かれている。リブ1~4の面内剛性は非常に大きく、面外剛性は非常に小さいとする。この構造の両端で断面のワーピングを拘束しないものとする。

この問題は梁理論では解けない。ここでは2つの解法を示す。1番目は、Bruhnの本に載っているディファレンシャル・ベンディングの考えを使う方法で、2番目は最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理を使う解法である。

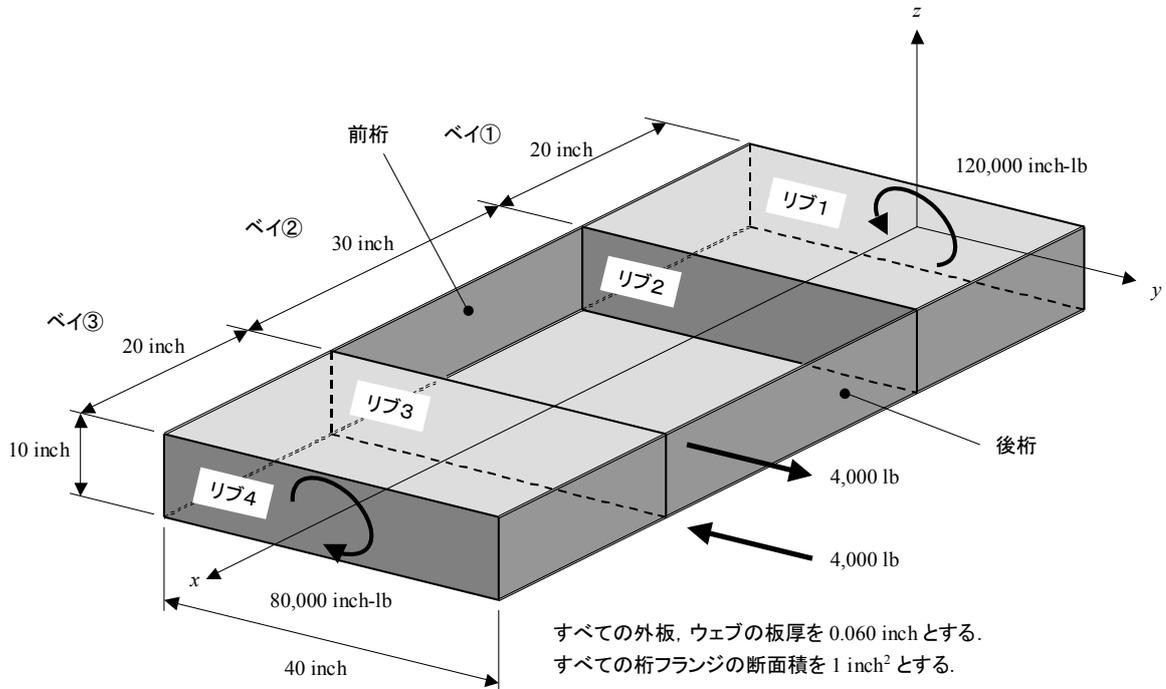


図 4-91 切り欠きのある対称2本桁構造のねじり

(1) Bruhn の本の方法

リブ1とリブ4の面ではワーピングは拘束されないが、ベイ①とベイ③はボックス構造になってねじり剛性が高い。一方、ベイ②は上面外板がないので、ねじりモーメントは前桁と後桁の逆向きのせん断荷重で受け持つ (ディファレンシャル・ベンディング (4.4.3 項))。ベイ①とベイ③のねじり剛性がベイ②のねじり剛性より非常に大きいので、前桁と後桁の両端 (リブ②の面とリブ③の位置) での境界条件は「固定」とであると仮定できる。これを図 4-92 に示した。

ベイ②の後桁のフリーボディ・ダイヤグラム (図 4-92) から後桁の内部荷重を求める。前桁の内部荷重は、後桁と絶対値が同じで方向が逆である。

ディファレンシャル・ベンディングの釣り合いからせん断力 V が決まる。 $40V = 120,000$ で、 $V = 3,000 \text{ lb}$

後桁のせん断流 q_{2R} は、 $q_{2R} = \frac{V}{h} = \frac{3,000}{10} = 300 \text{ lb/inch}$

桁フランジの軸力 P は A 点まわりのモーメントの釣り合いから、 $30V - 2P \times 10 = 0$ で、 $P = 4,500 \text{ lb}$

ベイ①の内部荷重、上面外板のせん断流と後桁のせん断流を求める。フリーボディ・ダイヤグラムは図 4-93 である。桁フランジの力の釣り合いから、

$$20q_{1U} + 20q_{1R} = 4,500$$

C 点まわりのモーメントの釣り合いから、

$$10 \times 40q_{1U} - 40 \times 10q_{1R} = 120,000$$

これを解くと、 $q_{1U} = 262.5 \text{ lb/inch}$, $q_{1R} = -37.5 \text{ lb/inch}$ が得られる。

次に、ベイ③の内部荷重、上面外板のせん断流と後桁のせん断流を求める。フリーボディ・ダイアグラムは図 4-93 である。桁フランジの力の釣り合いから、

$$20q_{3U} + 20q_{3R} = 4,500$$

C 点まわりのモーメントの釣り合いから、

$$10 \times 40q_{3U} - 40 \times 10q_{3R} = 80,000$$

これを解くと、 $q_{3U} = 212.5 \text{ lb/inch}$, $q_{3R} = 12.5 \text{ lb/inch}$ が得られる。結果を図 4-94 に示す。

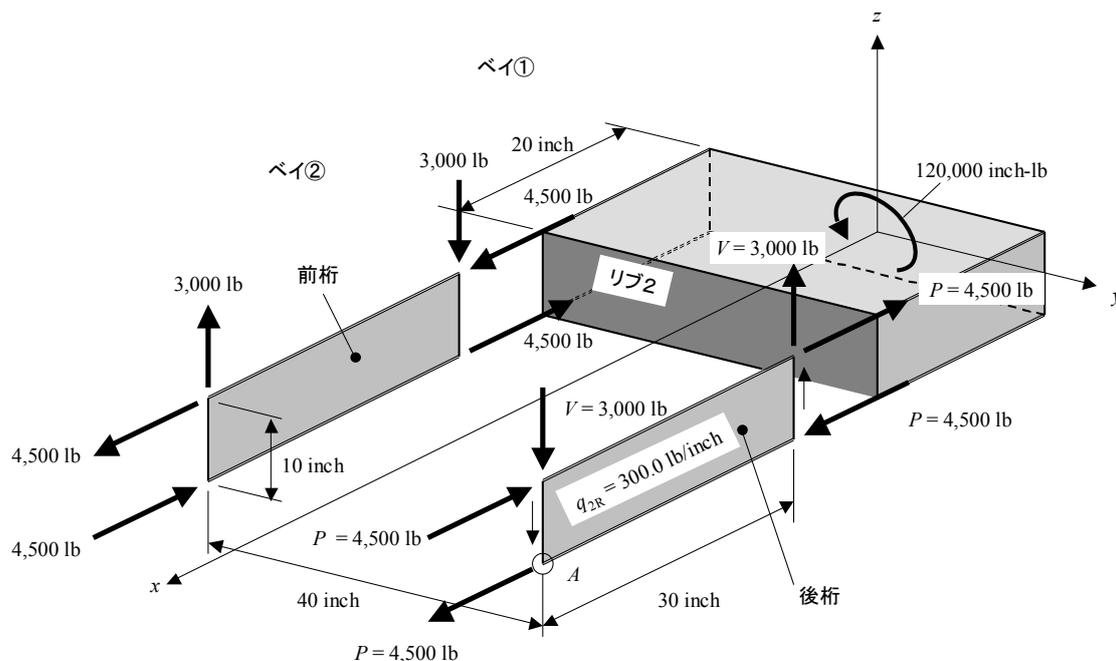


図 4-92 桁のディファレンシャル・ベンディング

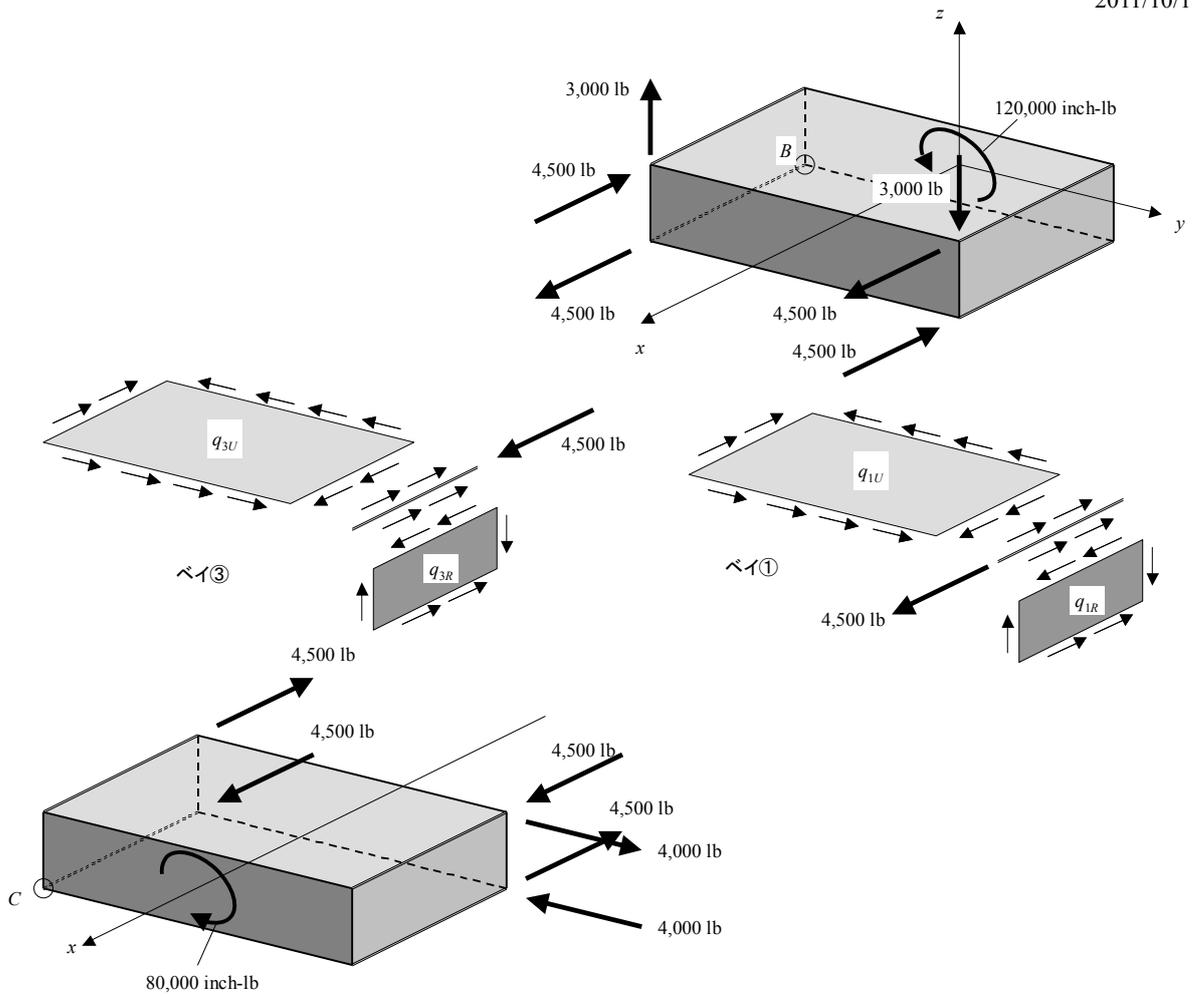


図 4-93 ベイ①とベイ③のフリーボディ・ダイアグラム

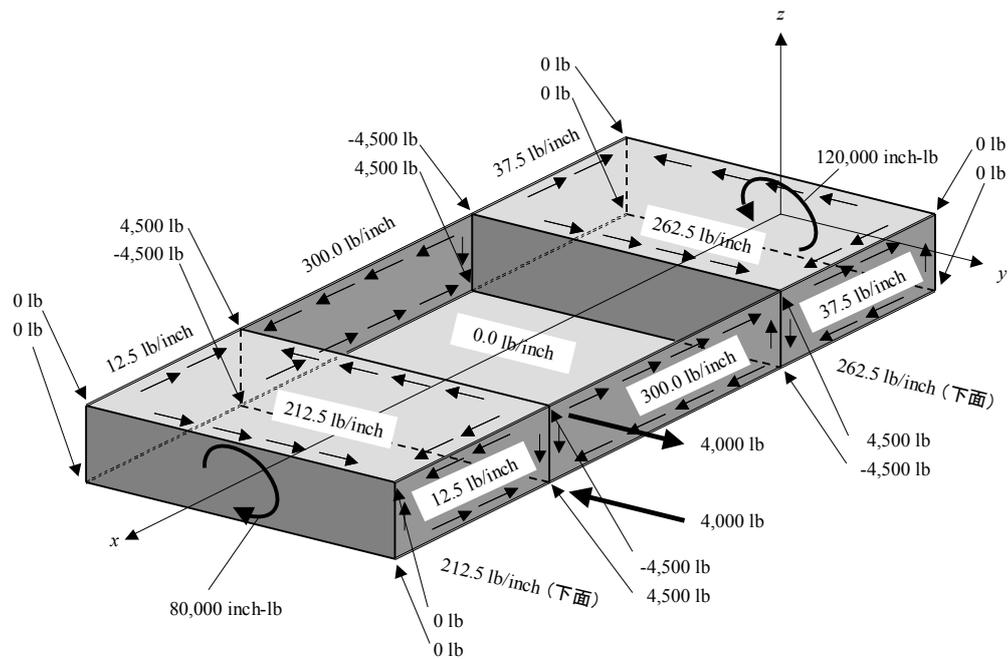


図 4-94 Bruhn の本の方法によるせん断流の計算結果

(2) 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理による解法

フリーボディ・ダイヤグラムは図 4-95 のようになる。リブは剛性が高いと仮定しており面内変形しないので、リブのコンプリメンタリ・エネルギーは無視できる。最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理を適用して MS-Excel のソルバーを使って解いた結果を表 4-18 と図 4-96 に示す。内部荷重（せん断流と軸力）を変数とし、内部荷重の釣り合い条件を制約条件として、全コンプリメンタリ・エネルギーを最小化することによって、解が得られる。中央のベイではトルクボックスが形成されていないので、下面外板のせん断流がゼロになり、ねじりモーメントを前後の桁のディファレンシャル・ベンディングで受け持っている。リブ 2 には純せん断荷重が発生している。リブ 3 は、外力として与えられた偶力を外板と桁ウェブに伝達している。

図 4-96 に示した結果は、Bruhn の本の結果と少し差がある。図 4-96 が正しい結果である。この差は、Bruhn の本の方法では、切り欠きのない構造でねじりモーメントによりフランジに軸力が発生しないとしていることに起因する。実際にはフランジに軸力が発生する。参考のために切り欠きがない構造の内部荷重を図 4-97 に示す。ベイ②とベイ③でねじりモーメントが異なるので、ねじれによって発生するワーピングの大きさが異なる。このワーピングを等しくするためにフランジに軸力が発生し、同じベイ内のパネルのせん断流が等しくなくなる。Bruhn の本では同じベイ内のせん断流が等しいと仮定していた。

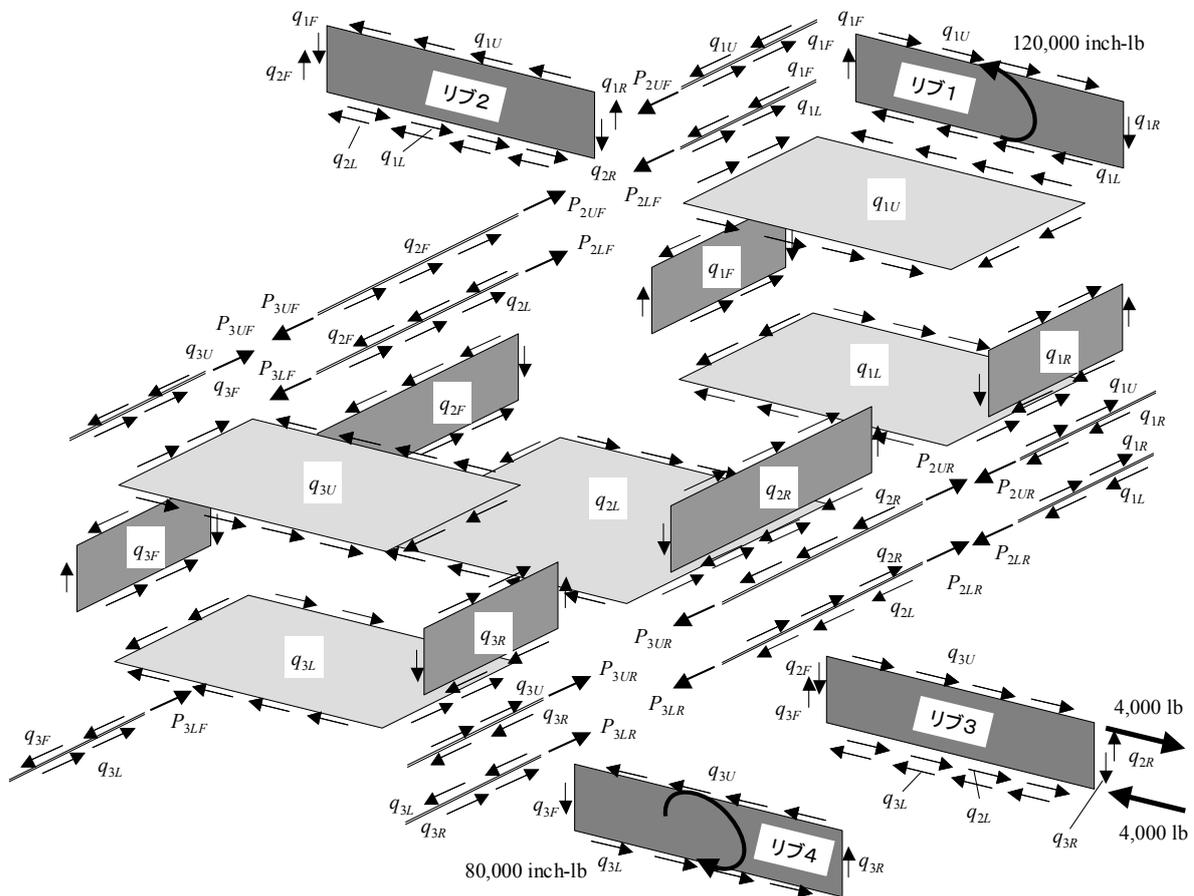


図 4-95 切り欠きのある対称 2 本桁構造のねじり - フリーボディ・ダイヤグラム

表 4-18 切り欠きのある対称 2 本桁構造の解法

最小化
全コンプリメントリ・エネルギー $U_c = 590.0194 \times E6 \text{ inch-lb}$

要素	力の種類	外力 (lb, inch-lb)	前桁ウェブ			後桁ウェブ			上面外板			下面外板			前桁フランジ		
			q1F (lb/inch)	q2F (lb/inch)	q3F (lb/inch)	q1R (lb/inch)	q2R (lb/inch)	q3R (lb/inch)	q1U (lb/inch)	q3U (lb/inch)	q1L (lb/inch)	q2L (lb/inch)	q3L (lb/inch)	P2UF (lb)	P2LF (lb)	P3UF (lb)	P3LF (lb)
リブ1	ねじりモーメント	120000	43.3	300.0	-18.3	0	300.0	-18.3	256.7	218.3	218.3	0.0	218.3	-4269	4269	4731	-4731
	y方向の力	0	-400					-400									
	z方向の力	0	10					40									
リブ2	ねじりモーメント	0	400					400									
	y方向の力	0	-400					-40									
	z方向の力	0	10					40									
リブ3	ねじりモーメント	-40000	400	-400				400									
	y方向の力	0	400					400									
	z方向の力	0	-10					-40									
リブ4	ねじりモーメント	-80000	400	400				400									
	y方向の力	0	-10					-40									
	z方向の力	0	10					40									
前桁上側フランジ1	x方向の力	0	-20					20						1			
前桁上側フランジ2	x方向の力	0	-30											-1		1	
前桁上側フランジ3	x方向の力	0		-20				20							-1		
前桁下側フランジ1	x方向の力	0	20											1			
前桁下側フランジ2	x方向の力	0	30											-1		1	
前桁下側フランジ3	x方向の力	0		20				-20							-1		-1
後桁上側フランジ1	x方向の力	0						20									
後桁上側フランジ2	x方向の力	0						30									
後桁上側フランジ3	x方向の力	0						20									
後桁下側フランジ1	x方向の力	0						-20									
後桁下側フランジ2	x方向の力	0						-30									
後桁下側フランジ3	x方向の力	0						-20									

(この表の右側は次のページにつづく)

表 4-18 切り欠きのある対称 2 本桁構造の解法(つづき)

(前のページの表からつづく)

要素	力の種類	後桁フランジ				合計
		P2UR (lb)	P2LR (lb)	P3UR (lb)	P3LR (lb)	
リップ1	ねじりモーメント	4269	-4269	-4731	4731	0.00
	y方向の力					0.00
	z方向の力					0.00
リップ2	ねじりモーメント					0.00
	y方向の力					0.00
	z方向の力					0.00
リップ3	ねじりモーメント					0.00
	y方向の力					0.00
	z方向の力					0.00
リップ4	ねじりモーメント					0.00
	y方向の力					0.00
	z方向の力					0.00
前桁上側フランジ1	x方向の力					0.00
前桁上側フランジ2	x方向の力					0.00
前桁上側フランジ3	x方向の力					0.00
前桁下側フランジ1	x方向の力					0.00
前桁下側フランジ2	x方向の力					0.00
前桁下側フランジ3	x方向の力					0.00
後桁上側フランジ1	x方向の力	1				0.00
後桁上側フランジ2	x方向の力	-1		1		0.00
後桁上側フランジ3	x方向の力			-1		0.00
後桁下側フランジ1	x方向の力		1			0.00
後桁下側フランジ2	x方向の力		-1		1	0.00
後桁下側フランジ3	x方向の力				-1	0.00

せん断パネルのコンブリメンタリ・エネルギー

要素	力の種類	G (ksi)	t (inch)	a (inch)	b (inch)	q (lb/inch)	Uc (inch-lb)
前桁ウエブ1	q1F	3960	0.06	10	20	43.27	768024.2905
前桁ウエブ2	q2F	3960	0.06	10	30	300.00	56818181.82
前桁ウエブ3	q3F	3960	0.06	10	20	-18.27	140494.6128
後桁ウエブ1	q1R	3960	0.06	10	20	43.27	768024.2905
後桁ウエブ2	q2R	3960	0.06	10	30	300.00	56818181.82
後桁ウエブ3	q3R	3960	0.06	10	20	-18.27	140494.6128
上面外板1	q1U	3960	0.06	40	20	256.73	110959561.5
上面外板3	q3U	3960	0.06	40	20	218.27	80205487.06
下面外板1	q1L	3960	0.06	40	20	256.73	110959561.5
下面外板2	q2L	3960	0.06	40	30	0.00	0
下面外板3	q3L	3960	0.06	40	20	218.27	80205487.06
	合計						497823498.6

軸力部材のコンブリメンタリ・エネルギー

要素	力の種類	E (ksi)	A (inch ²)	L (inch)	P1 (lb)	P2 (lb)	Uc (inch-lb)
前桁上フランジ1	0, P2UF	10300	1	20	0	-4269	5695336.637
前桁上フランジ2	P2UF, P3UF	10300	1	30	-4269	4731	9607669.188
前桁上フランジ3	P3UF, 0	10300	1	20	4731	0	7242944.858
前桁下フランジ1	0, P2LF	10300	1	20	0	4269	5695336.637
前桁下フランジ2	P2LF, P3LF	10300	1	30	4269	-4731	9607669.188
前桁下フランジ3	P3LF, 0	10300	1	20	-4731	0	7242944.858
後桁上フランジ1	0, P2UR	10300	1	20	0	4269	5695336.637
後桁上フランジ2	P2UR, P3UR	10300	1	30	4269	-4731	9607669.188
後桁上フランジ3	P3UR, 0	10300	1	20	-4731	0	7242944.858
後桁下フランジ1	0, P2LR	10300	1	20	0	-4269	5695336.637
後桁下フランジ2	P2LR, P3LR	10300	1	30	-4269	4731	9607669.188
後桁下フランジ3	P3LR, 0	10300	1	20	4731	0	7242944.858
	合計						92195682.73

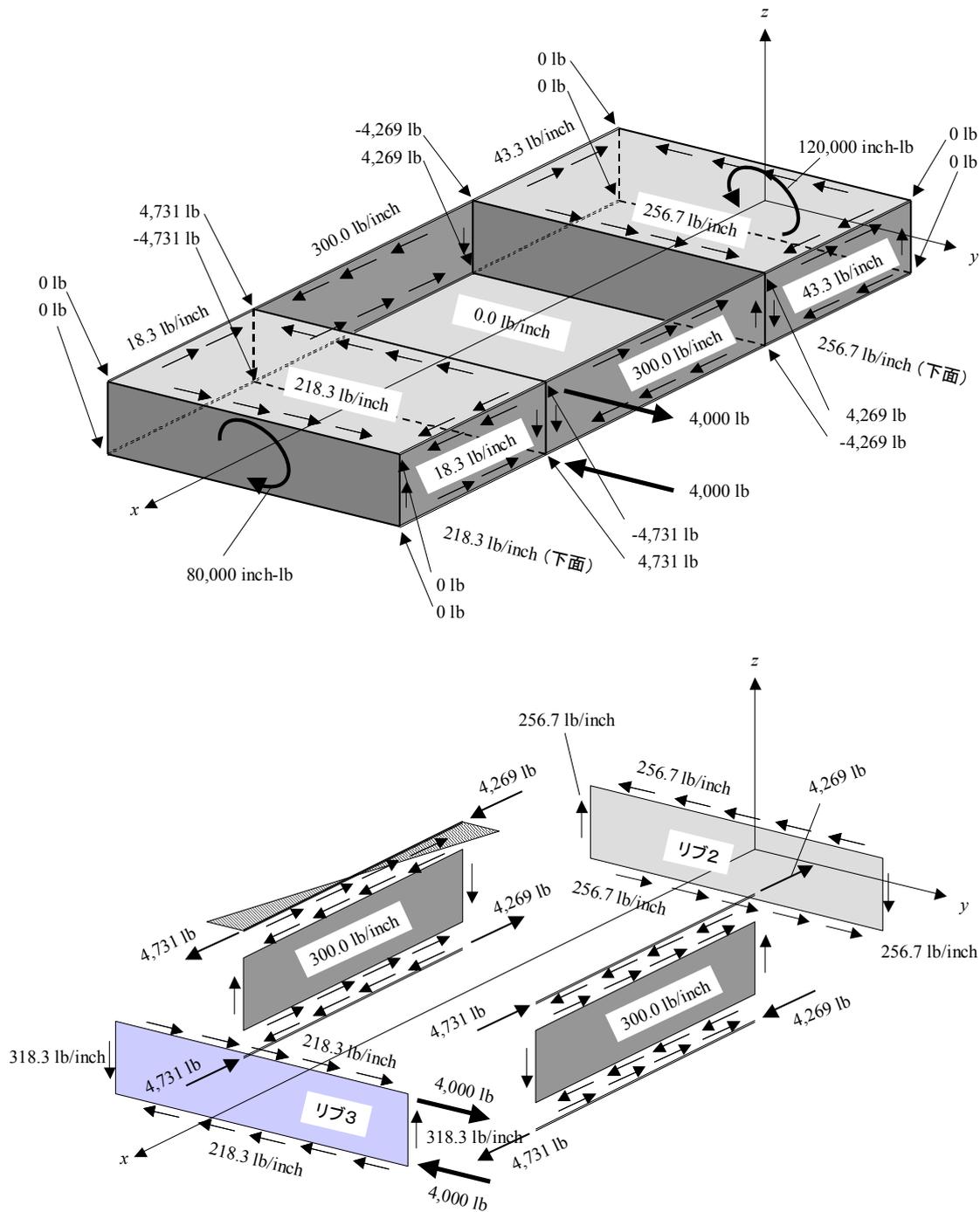


図 4-96 内部荷重 - 切り欠きのある対称2本桁構造のねじり

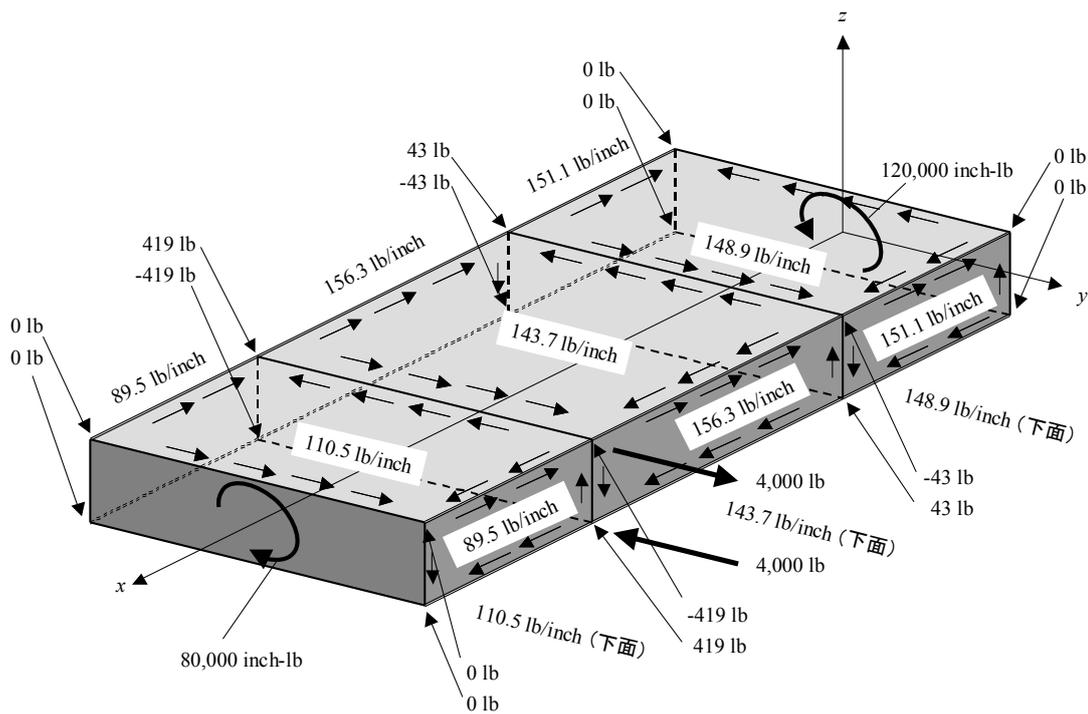
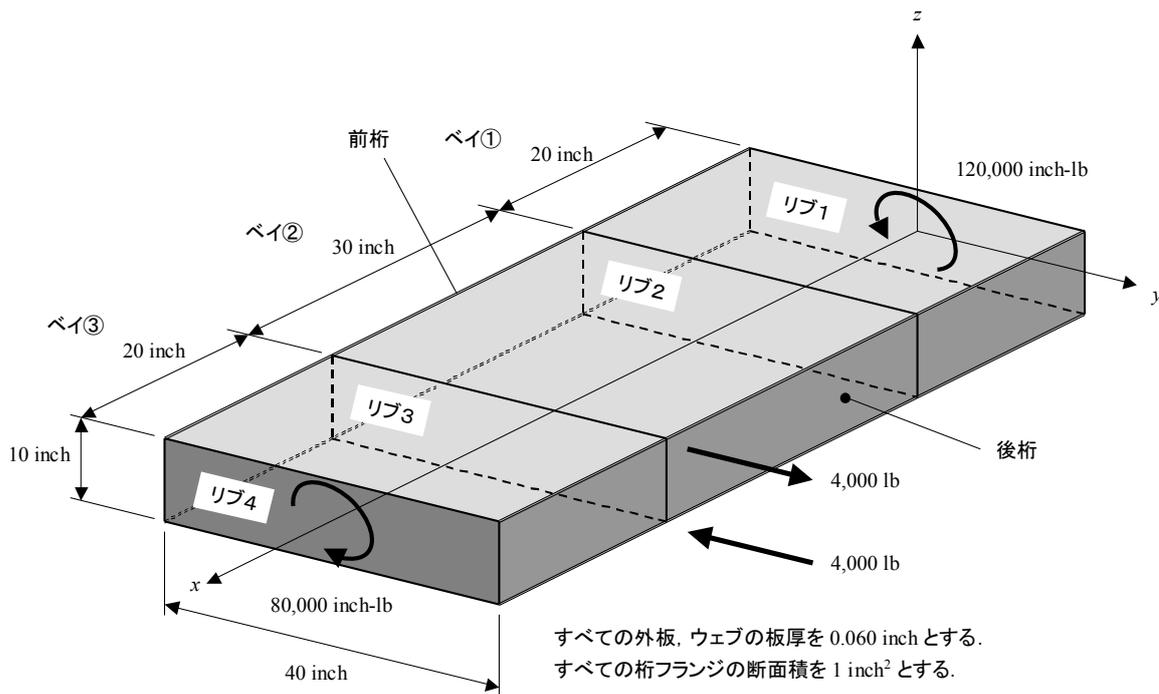


図 4-97 切り欠きがない場合の内部荷重

4.6.6 切り欠きのある2本桁構造の曲げねじり

Bruhn の本の A21.9 項に載っている切り欠きのある対称2本桁構造の曲げねじりを考える (図 4-98). ペイ②の下面外板はついていない.

最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理を使えば, 前項の問題とまったく同じように解くことができる. フリーボディ・ダイヤグラムは図 4-99 のようになる. 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理を適用して MS-Excel のソルバーを使って解いた結果を表 4-19 と図 4-100 に示す.

表 4-19 切り欠きのある2本桁構造の曲げねじりの解法

最小化

全コンプリメントリ-エネルギー $U_c = 10175.7673 \times E6 \text{ inch-lb}$

力の釣り合い

要素	力の種類	外力 (lb, inch-lb)	前桁ウェブ			後桁ウェブ			上面外板			下面外板		
			q1F (lb/inch)	q2F (lb/inch)	q3F (lb/inch)	q1R (lb/inch)	q2R (lb/inch)	q3R (lb/inch)	q1U (lb/inch)	q2U (lb/inch)	q3U (lb/inch)	q1L (lb/inch)	q2L (lb/inch)	q3L (lb/inch)
リブ1	ねじりモーメント	0	485.8	320.0	501.6	267.0	640.0	231.3	168.6	-80.0	192.5	248.6	272.5	
	y方向の力	0	360		0			-240	30			-30		
	z方向の力	0	12		8		2		2			2		
リブ2	ねじりモーメント	0	-360	360	0	0	0	0	240	-240		0		
	y方向の力	0						-30	30			30		
	z方向の力	0	-12	12	-8	8	2	-2	-2	2		-2		
リブ3	ねじりモーメント	0		-360	360	0	0	0	240	240	-240		0	
	y方向の力	0							-30	-30	30		-30	
	z方向の力	0	-12	-12	12	-8	8	2	-2	-2	2		2	
リブ4	ねじりモーメント	134400			-360			0					0	
	y方向の力	-2400											30	
	z方向の力	8800			-12			-8			-2		-2	
前桁上側フランジ1	x方向の力	0	-30						-30					
前桁上側フランジ2	x方向の力	0		-25						-25				
前桁上側フランジ3	x方向の力	0		-30						-30				
前桁下側フランジ1	x方向の力	0	30								30			
前桁下側フランジ2	x方向の力	0		25										
前桁下側フランジ3	x方向の力	0		30									30	
後桁上側フランジ1	x方向の力	0				-30			30					
後桁上側フランジ2	x方向の力	0								25				
後桁上側フランジ3	x方向の力	0												
後桁下側フランジ1	x方向の力	0				30								
後桁下側フランジ2	x方向の力	0												
後桁下側フランジ3	x方向の力	0												
後桁下側フランジ3	x方向の力	0						30					-30	

表 4-19 切り欠きのある 2 本桁構造の曲げねじりの解法 (つづき)

力の釣り合い	要素	力の種類	前桁フランジ						後桁フランジ						合計
			P1UF (lb)	P1LF (lb)	P2UF (lb)	P2LF (lb)	P3UF (lb)	P3LF (lb)	P1UR (lb)	P1LR (lb)	P2UR (lb)	P2LR (lb)	P3UR (lb)	P3LR (lb)	
	リブ1	ねじりモーメント	-46454.8	53254.8	-26823	31223	-20823	23223	-22118	15318	-19166	14766	-1166	-1234	134400
		y方向の力													-2400
		z方向の力													
	リブ2	ねじりモーメント													0.00
		y方向の力													0.00
		z方向の力													0.00
	リブ3	ねじりモーメント													0.00
		y方向の力													0.00
		z方向の力													0.00
	リブ4	ねじりモーメント													0.00
		y方向の力													0.00
		z方向の力													0.00
	前桁上側フランジ1	x方向の力	-1		1										0.00
	前桁上側フランジ2	x方向の力			-1			1							0.00
	前桁上側フランジ3	x方向の力						-1							0.00
	前桁下側フランジ1	x方向の力		-1		1									0.00
	前桁下側フランジ2	x方向の力				-1									0.00
	前桁下側フランジ3	x方向の力													0.00
	後桁上側フランジ1	x方向の力							-1		1				0.00
	後桁上側フランジ2	x方向の力									-1		1		0.00
	後桁上側フランジ3	x方向の力											-1		0.00
	後桁下側フランジ1	x方向の力											1		0.00
	後桁下側フランジ2	x方向の力											-1		0.00
	後桁下側フランジ3	x方向の力												1	0.00

表 4-19 切り欠きのある 2 本桁構造の曲げねじりの解法 (つづき)

せん断パネルのコンプリメンタリ・エネルギー

要素	力の種類	G (ksi)	t (inch)	a (inch)	b (inch)	q (lb/inch)	Uc (inch-lb)
前桁ウエブ1	q1F	3960	0.06	12	30	485.76	178758437.8
前桁ウエブ2	q2F	3960	0.06	12	25	320.00	64646464.65
前桁ウエブ3	q3F	3960	0.06	12	30	501.64	190637594.5
後桁ウエブ1	q1R	3960	0.06	8	30	267.04	36016358.48
後桁ウエブ2	q2R	3960	0.06	8	25	640.00	172390572.4
後桁ウエブ3	q3R	3960	0.06	8	30	231.31	27022939.82
上面外板1	q1U	3960	0.06	30.067	30	168.64	53981266.26
上面外板2	q2U	3960	0.06	30.067	25	-80.00	10123569.02
上面外板3	q3U	3960	0.06	30.067	30	192.46	70308640.17
下面外板1	q1L	3960	0.06	30.067	30	248.64	117345940.6
下面外板3	q3L	3960	0.06	30.067	30	272.46	140907902.3
合計							1062159686

軸力部材のコンプリメンタリ・エネルギー

要素	力の種類	E (ksi)	A (inch ²)	L (inch)	P1 (lb)	P2 (lb)	Uc (inch-lb)
前桁上フランジ1	P1UF, P2UF	10300	1	30	-46455	-26823	2001733089
前桁上フランジ2	P2UF, P3UF	10300	1	25	-26823	-20823	692392641.2
前桁上フランジ3	P3UF, 0	10300	1	30	-20823	0	210482531.1
前桁下フランジ1	P1LF, P2LF	10300	1	30	53255	31223	2657142724
前桁下フランジ2	P2LF, P3LF	10300	1	25	31223	23223	905850398.6
前桁下フランジ3	P3LF, 0	10300	1	30	23223	0	261798073.7
後桁上フランジ1	P1UR, P2UR	10300	0.5	30	-22118	-19166	1243126183
後桁上フランジ2	P2UR, P3UR	10300	0.5	25	-19166	-1166	316358781.1
後桁上フランジ3	P3UR, 0	10300	0.5	30	-1166	0	1319095.715
後桁下フランジ1	P1LR, P2LR	10300	0.5	30	15318	14766	659063824.4
後桁下フランジ2	P2LR, P3LR	10300	0.5	25	14766	-1234	162880920.4
後桁下フランジ3	P3LR, 0	10300	0.5	30	-1234	0	1479315.985
合計							9113627578

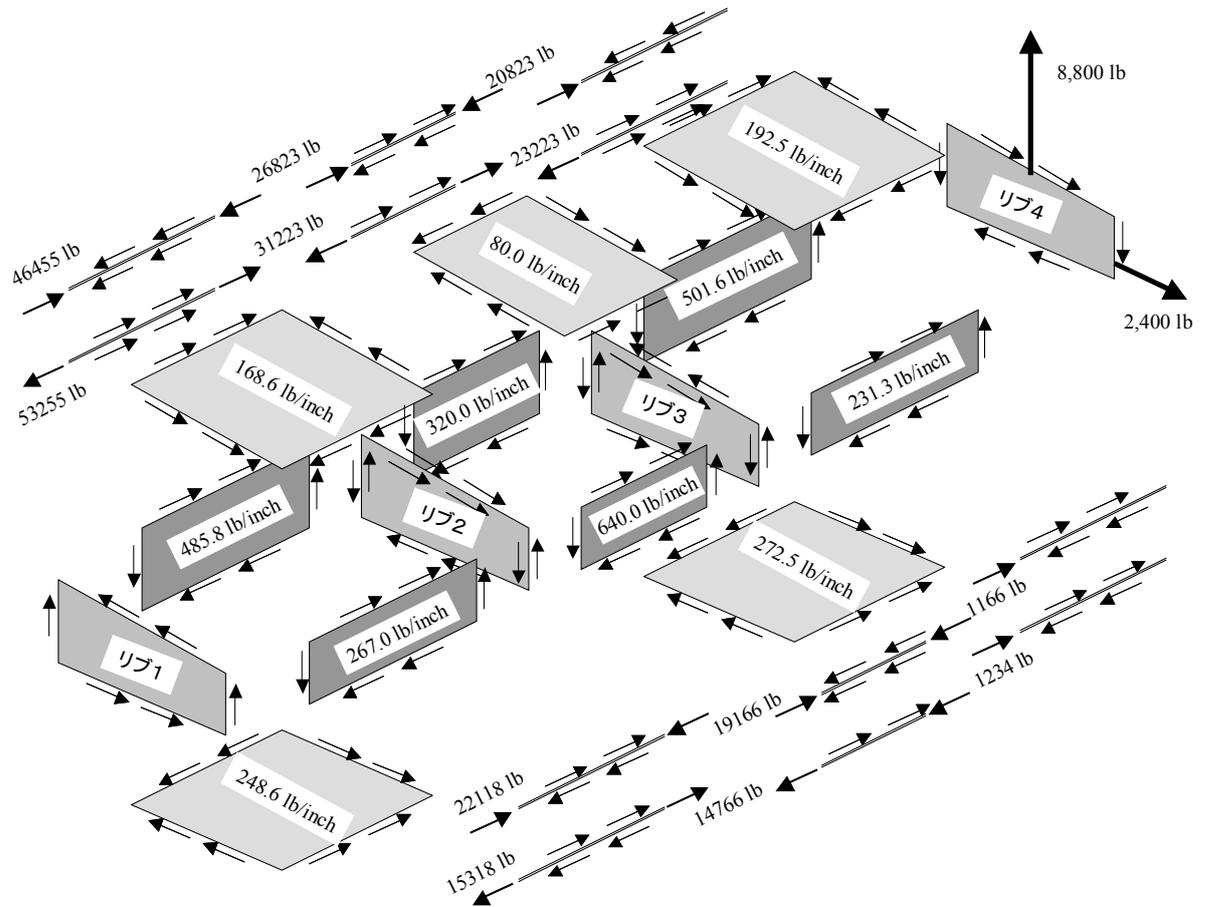


図 4-100 切り欠きのある二本桁構造の曲げねじり - 内部荷重分布

4.6.7 せん断場理論のまとめ

最初に述べたように、せん断場理論はセミモノコック構造をせん断パネルと軸力部材でモデル化する方法である。静定構造の場合は簡単に解けるが、不静定構造の場合はその問題に適した方法で解くことになる。構造要素の数が少ない場合には最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理を使って解けばよい。構造要素の数が多い問題は有限要素法を使って解ける。解析ツールがあるので、問題を解くこと自体は難しいことではない。大事なことは、せん断パネルと軸力部材の力のやり取りを理解することである。ただ問題を解くだけでなく、フリーボディ・ダイヤグラムを自分で描くことにより、構造を理解することができるようになる。基本的な問題を自分自身で解いて、フリーボディ・ダイヤグラムを描く訓練をするとよい。そうすることにより、構造を分析する力がつき、「荷重の流れ」が見えるようになる。

4.7 重要な構造要素の内部荷重

航空機構造解析の実務でよく出てくる重要な構造要素の内部荷重解析を以下に示す。

4.7.1 キックフォース

軸力部材が折れ曲がっている場合には折れ曲がり点で軸力の向きが変わるので、合力として軸力部材の方向ではない力が発生する(図 4-101)。この合力のことをキックフォース(Kick Force)と呼ぶ。図 4-101 の左図のようにキックフォースを受け持つ部材がないと、その場所で破壊する。したがって右図のようにキックフォースを支持するスティフナを設ける。

図 4-102 に示すようなゆるやかに曲がったフレームの場合でも、フランジの軸力の向きが変化するので、フランジのキックフォースがウェブに働く。ウェブの板厚が薄い場合にはこのキックフォースでウェブがつぶれるので、この力に対抗するためにスティフナが必要である。

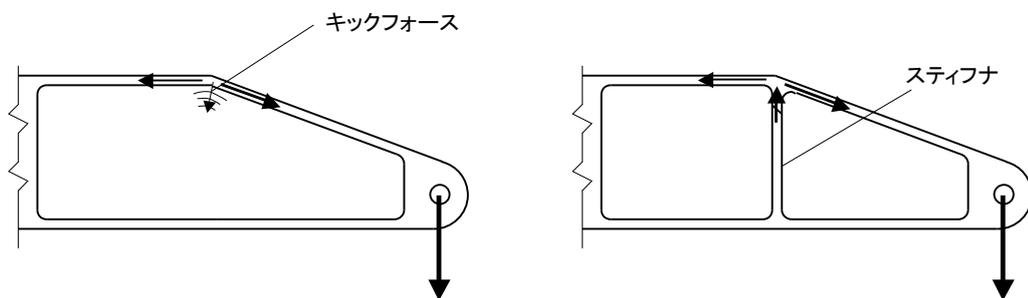


図 4-101 キックフォース

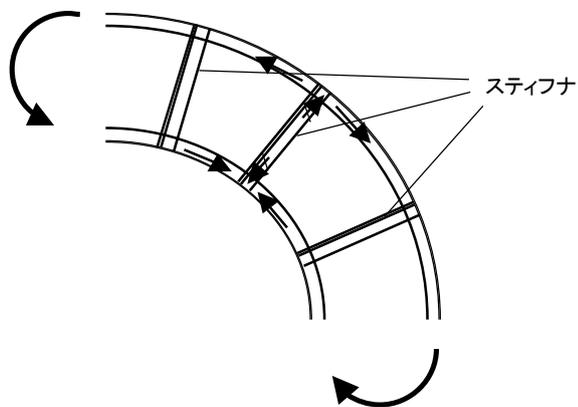


図 4-102 曲がったフレームのキックフォース

4.7.2 バランス・アーム

図 4-103 に Super Constellation の前脚を示す。A 点と B 点で前部胴体の前脚室側壁に取り付けられている。スプリングバック荷重 (Spring-back Load) が負荷される場合を考えると、胴体取付点 A、B の反力は図に示すようになり、前後荷重は逆向きに作用している。胴体側構造の A 点と B 点は引き離されようとする。この荷重の A-B 点間の釣り合い分はなるべく早く釣り合わせると構造効率が良い。胴体側の A 点と B 点を直接結ぶような構造にしてこの荷重を釣り合わせる。このような構造をバランス・アームと呼ぶ。バランス・アームを脚組側に装備することもある。

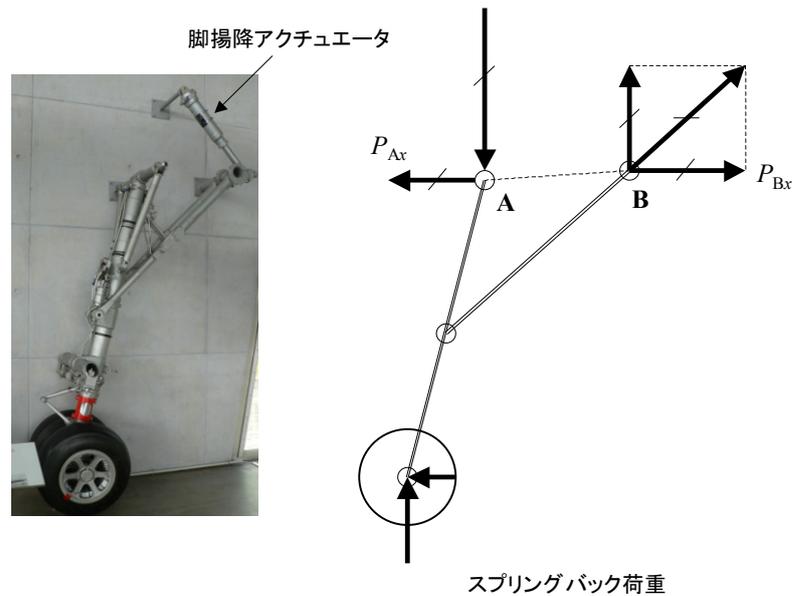


図 4-103 前脚組

4.7.3 せん断クリップ

ウェブどうしを結合してせん断荷重を伝えるには、せん断クリップ (Shear Clip) を使う。せん断クリップの形状には、L 型アンゲル材と T 型材がある (図 4-104)。結合されるウェブは面外方向の剛性が小さいため、ファスナのせん断だけで荷重を伝えなければならない。このため、ファスナ荷重は図 4-104 のようになる。すなわち、アンゲルまたは T 型材の角にせん断力が働き、この位置でモーメントを発生しないような釣り合い状態でなければならない。図 4-104 の左図で、ファスナ荷重はせん断力をファスナ本数で割った値よりも大きくなることに注意しなければならない。ファスナ列位置でモーメントを発生するために、ファスナ荷重は上下荷重だけでなく横荷重成分もある。ファスナ荷重を計算するには、角にせん断力だけが働くとして、ファスナ・グループ解析 (4.8.3 項) を行う。

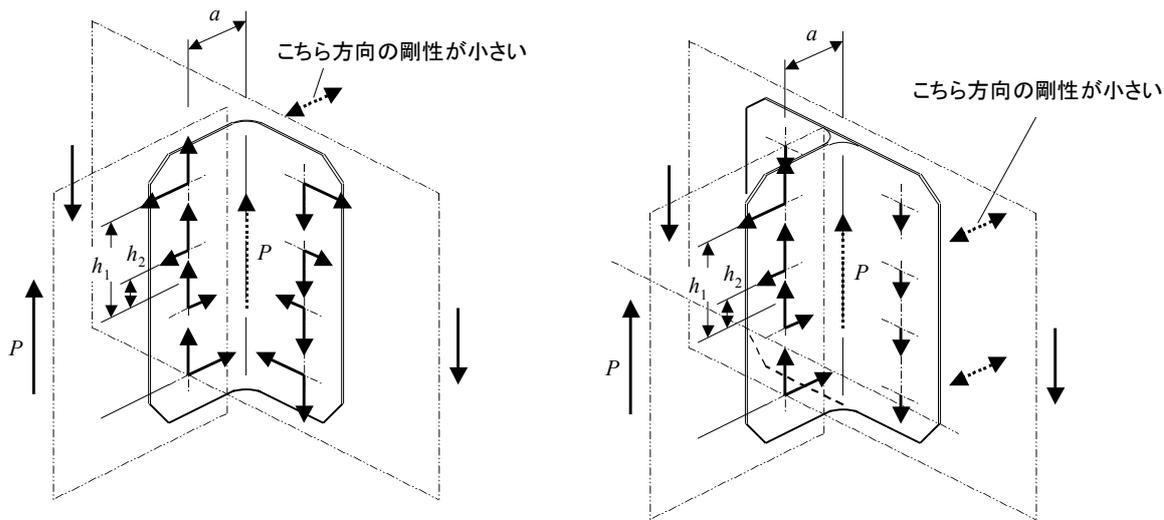


図 4-104 せん断クリップ (その 1)

図 4-105 の左図の場合には、ファスナが水平に並んでいるので、図中に示したようなファスナ荷重となる。右図のようにファスナ 1 本の場合には、クリップに腰曲げ荷重が発生するので、避けなければならない。

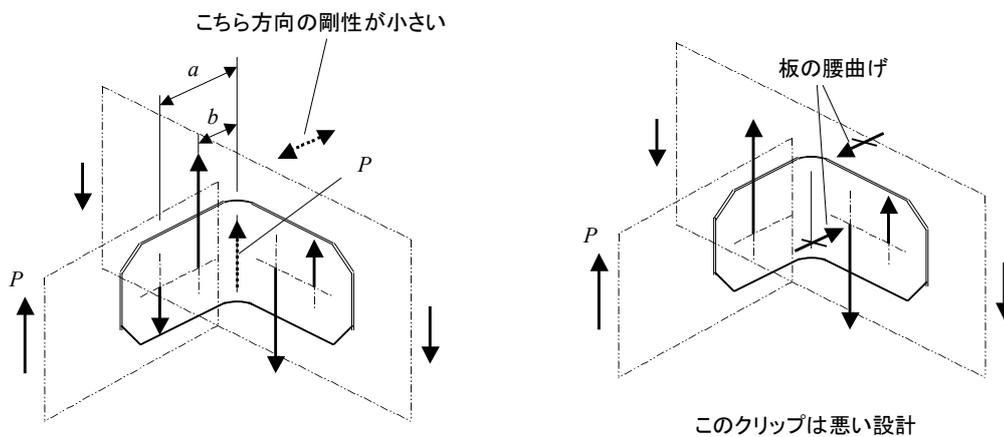


図 4-105 せん断クリップ (その 2)

4.7.4 インターコストル

インターコストル (Intercostal) とは、解剖学の用語で肋骨の間をつなぐ筋肉のことである。航空機構造では、フレームやリブ間をつなぐ横渡し材のことを指す。

胴体フレームにフレーム面外の荷重が入る場合には、フレームは面外の剛性が小さいため、フレームが倒れてしまう (図 4-106 の左図)。インターコストルをフレーム間に入れてやれば、この面外荷重を外板に流すことができる。このインターコストルのフリーボディ・ダイアグラムを図 4-107 に示す。外荷重のフレーム面外の成分がインターコストルのフランジの軸力として入るように設計する。このフランジ軸力がインターコストルのせん断流になり、隣のフレーム位置ではフランジ軸力がゼロになる。インターコストルのウェブはせん断パネルとして働く。インターコストルのウェブとフレームのウェブ間でせん断力を伝えるので、せん断クリップが必要である。

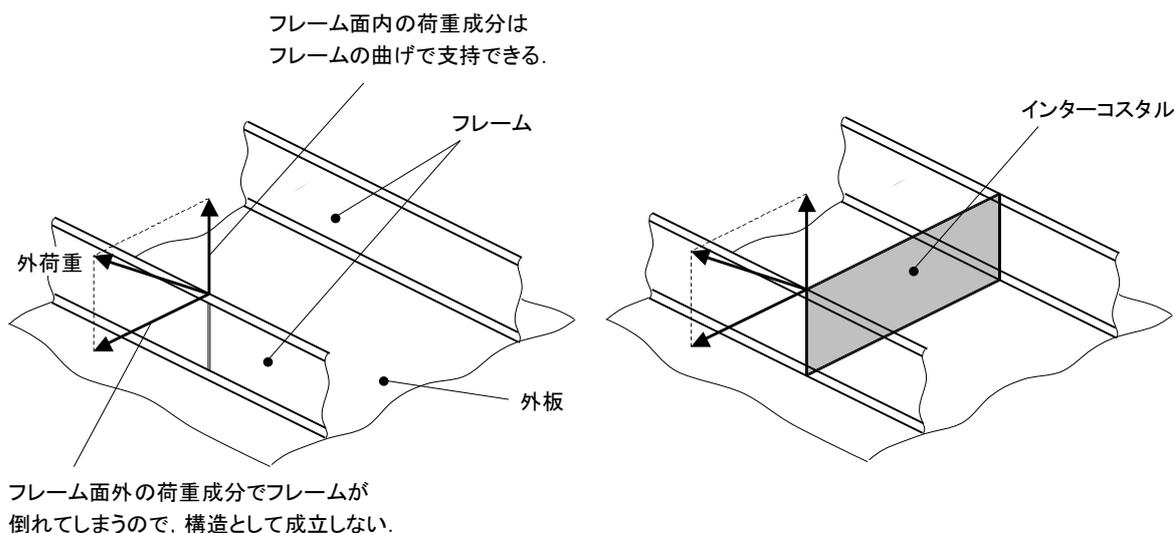


図 4-106 フレーム面外の荷重とインターコストル

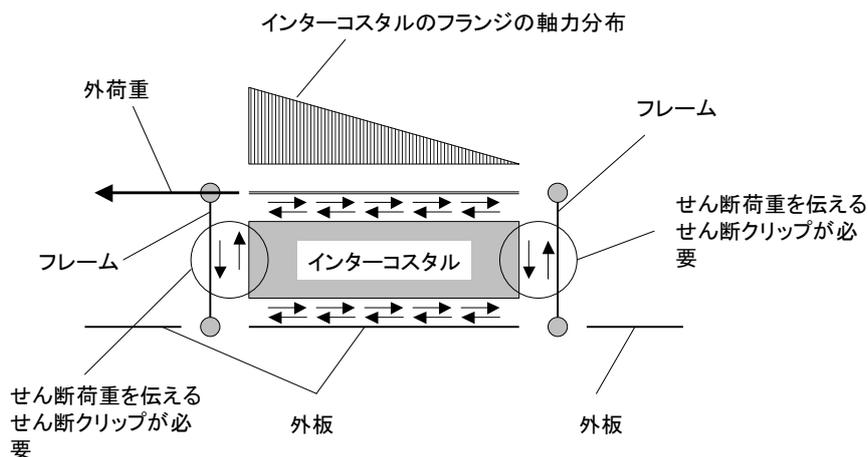
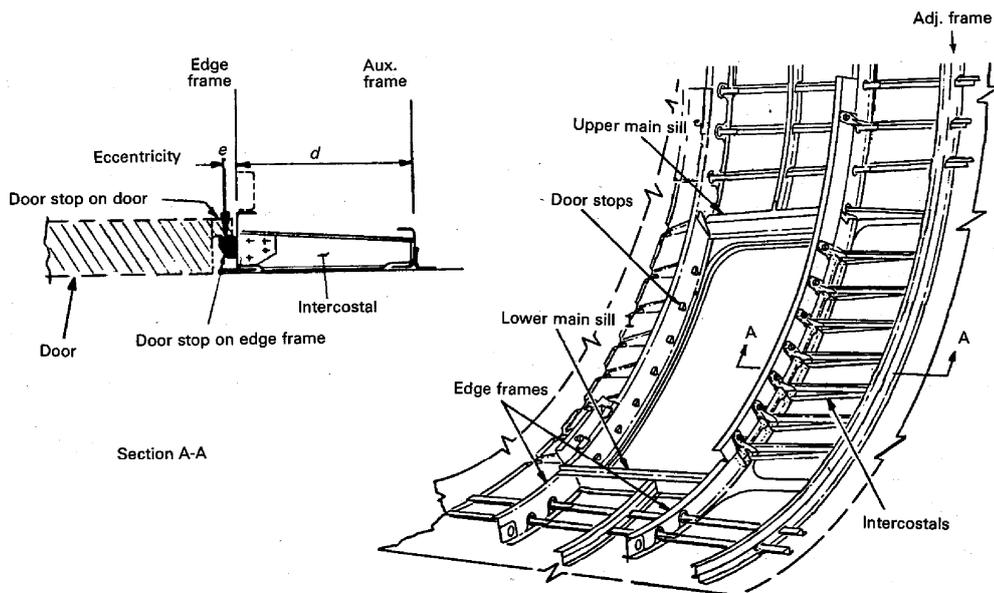


図 4-107 インターコストルのフリーボディ・ダイアグラム

他のインターコストルの例として、与圧胴体の扉開口部にあるストップ金具（Stop Fitting）のバックアップ構造を示す。ストップ金具からの荷重はエッジフレーム（Edge Frame）のウェブ面に平行の荷重であるが、荷重の荷重点がエッジフレームのウェブ面から離れているために、エッジフレームにねじりモーメントが発生する。エッジフレームはこのねじりモーメントに耐えることができないため、インターコストルでねじりモーメントを受け持つようにする。インターコストルの設計例を図 4-109 に示す。この図に示すように、隣のフレーム位置でインターコストルの軸力はゼロになるので、インターコストルの上側フランジは斜めになっていてもよい。図 4-110 にフリーボディ・ダイヤグラムを示す。このインターコストルは、エッジフレーム位置で固定された梁に隣のフレーム位置からせん断荷重 V を負荷しているとみなすことができる。



Niu の教科書（文献[1-5]）より

図 4-108 与圧胴体開口部のインターコストル

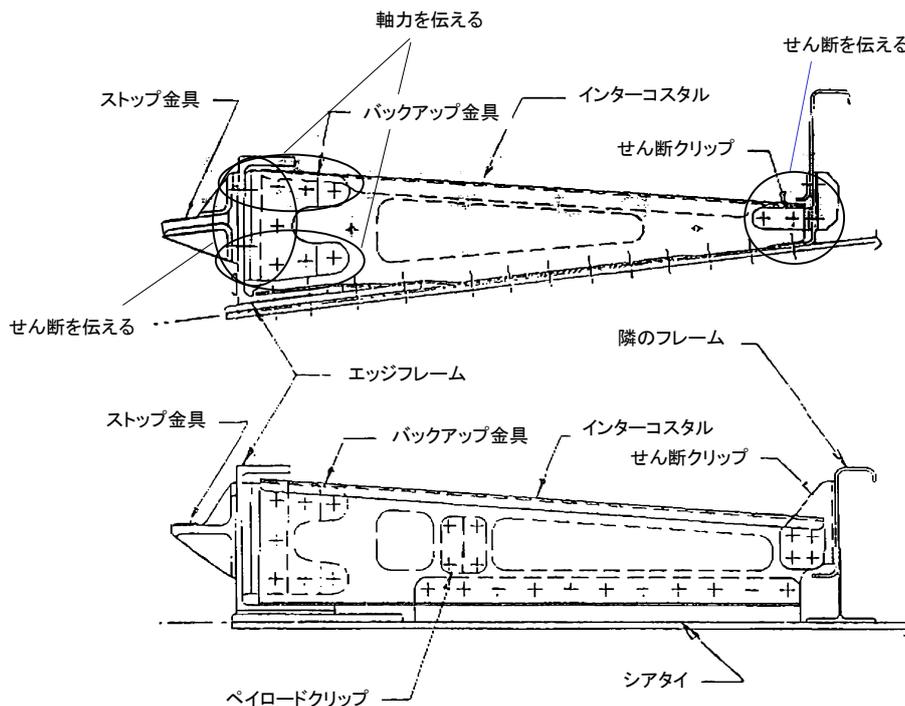


図 4-109 ストップ金具バックアップのインターコストルの具体例

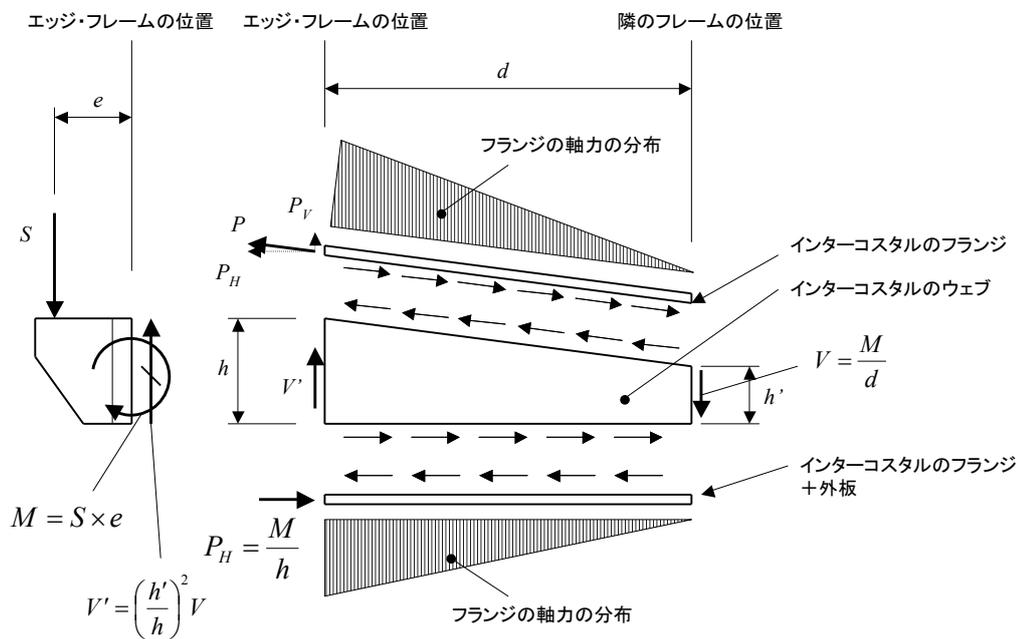


図 4-110 ストップ金具バックアップのインターコストルのフリーボディ・ダイアグラム

4.7.5 内圧が負荷される円筒

旅客機は高高度を飛行するので、客室内に圧力をかけて快適性を確保している。これを与圧（Pressurization）という。与圧は胴体外板の板厚を決める重要なパラメータである。与圧に対しては、胴体の断面形状は円形が一番効率が良い。内圧が負荷される円筒（図 4-111）の外板の応力を説明する。円筒の半径を R 、板厚を t 、内圧を p とする。円筒断面を半分に分けてフリーボディ・ダイアグラムを描くと図 4-112 の左図のようになるので、外板の周方向応力（Hoop Stress）は、 $f_{hoop} = pR/t$ であることがわかる。同じように、軸方向の釣り合いを考えると円筒の両端に断面積分の圧力が働くので（右図）、軸方向応力（Axial Stress）は、 $f_{axial} = pR/2t$ となる。これらの関係式は重要であるので、覚えておいてほしい。直径が大きくなると、外板応力は増加する。輸送機の胴体径と胴体外板板厚の関係をプロットしたのが図 4-113 である。胴体径と外板板厚がほぼ比例していることがわかる。

断面が円形からはずれると、外板の周方向応力は局所的な曲率半径でほぼ決まる。円形からはずれることで最も大きな影響を受けるのはフレームの曲げモーメントである。断面形状が円形になろうとして、フレームの曲げモーメントが増加する。

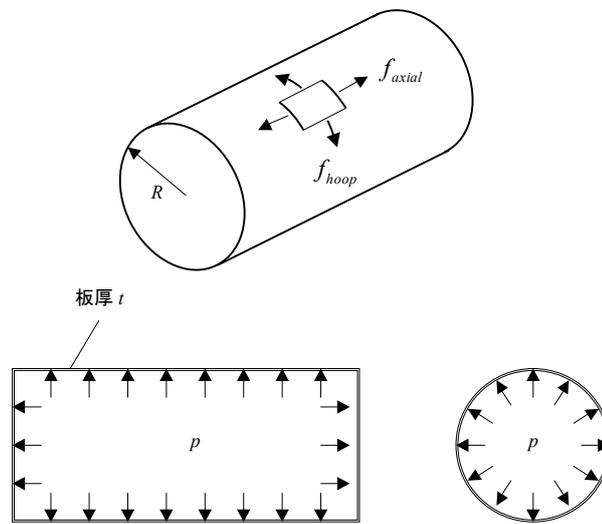


図 4-111 内圧が負荷される円筒

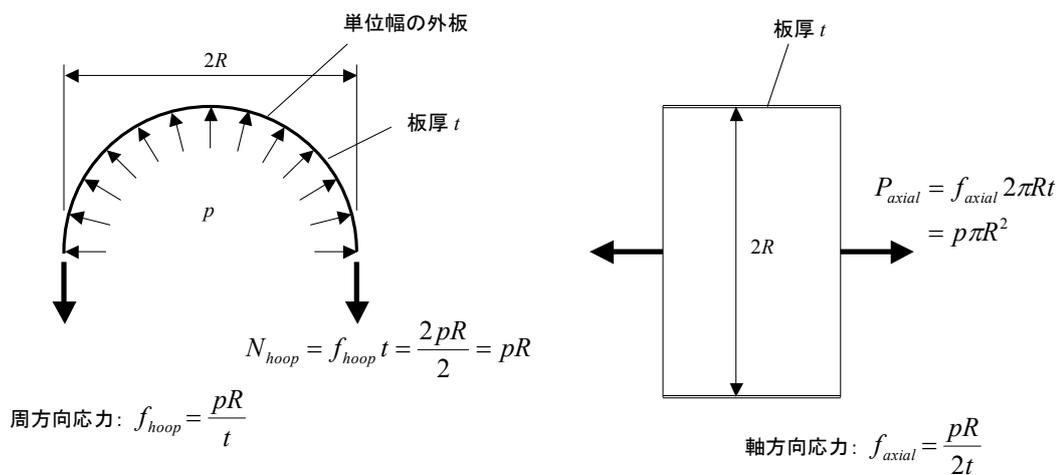
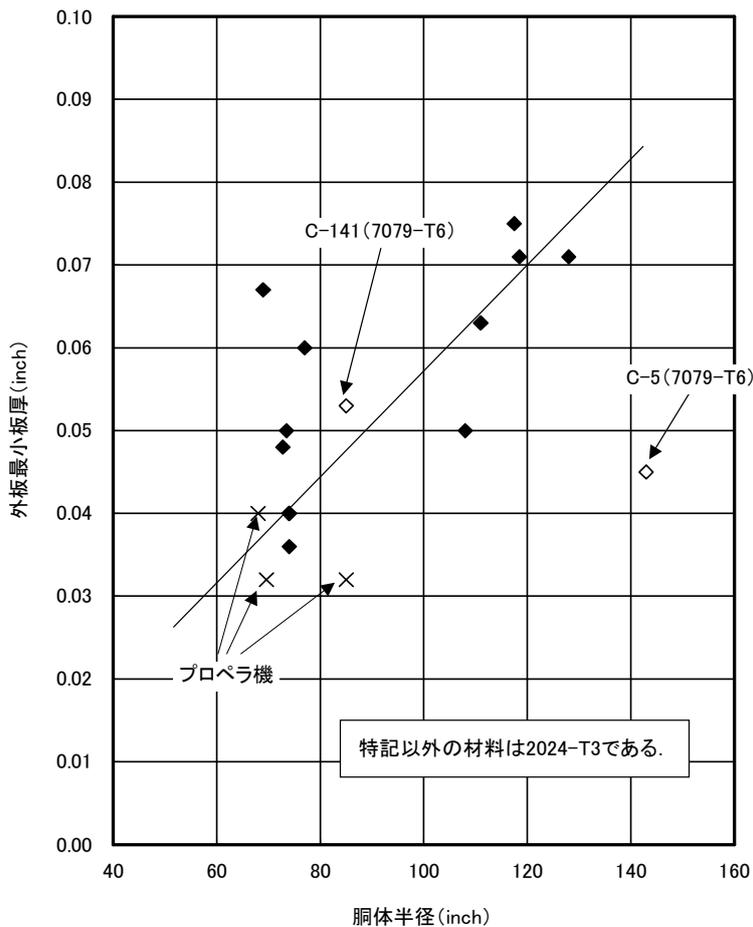


図 4-112 内圧が負荷される円筒の周方向応力と軸方向応力



Niu (文献[1-5]) の表 11.3.11 より

図 4-113 輸送機の胴体径と外板板厚との関係

4.7.6 胴体ストリングが受け持つ与圧荷重

実際の胴体構造では、ストリングとフレームがあるので、与圧の一部をストリングが受け持ち、それをフレームに伝える。力の伝え方を図 4-114 に示す。

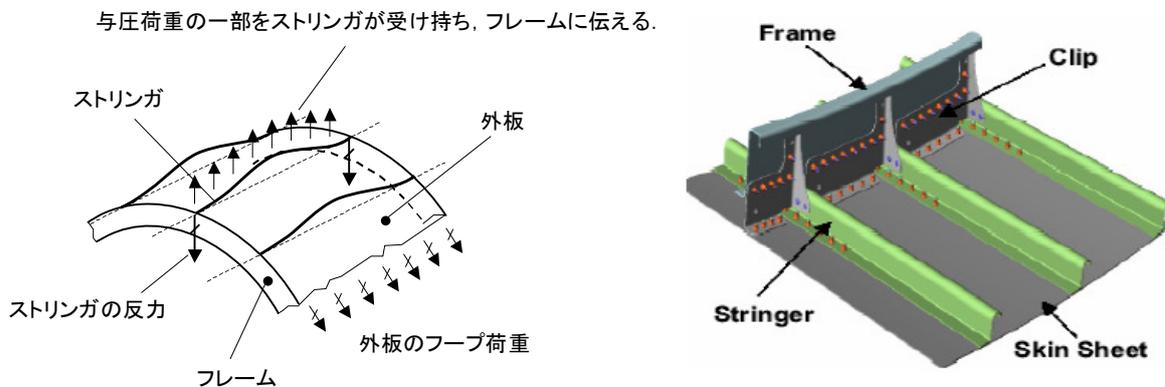


図 4-114 ストリングが受け持つ与圧荷重

4.7.6.1 円筒殻の理論による解法

まず、円筒殻の理論を使って解く方法を紹介する (Timoshenko (文献[2-14])). 長さ L , 半径 R , 板厚 t の円筒を考える. 基本解として, 以下の3つの荷重ケース (図 4-115) を考える.

- ① 内圧 p が負荷されるケース
- ② 両端に半径方向の一樣なせん断力 Q_0 が働くケース
- ③ 両端に一樣な曲げモーメント M_0 が働くケース

これらの荷重ケースの解は,

- ① 内圧 p が負荷されるケース

$$w^{①} = \frac{pR^2}{Et}$$

(ここでは板の軸方向の応力はゼロとする.)

- ② 両端に半径方向の一樣なせん断力 Q_0 が働くケース

$$(w)_{x=0, x=L}^{②} = -\frac{2Q_0\beta R^2}{Et} \chi_1(2\alpha)$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0, x=L}^{②} = \pm \frac{2Q_0\beta^2 R^2}{Et} \chi_2(2\alpha)$$

- ③ 両端に一樣な曲げモーメント M_0 が働くケース

$$(w)_{x=0, x=L}^{③} = -\frac{2M_0\beta^2 R^2}{Et} \chi_2(2\alpha)$$

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0, x=L}^{③} = \pm \frac{4Q_0\beta^3 R^2}{Et} \chi_3(2\alpha)$$

ここで,

$$\beta^4 = \frac{Et}{4R^2D}, \quad \alpha = \frac{\beta L}{2}$$

$$D \text{ は板の曲げ剛性: } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

ただし, 外板にストリンガがある場合には, ストリンガの曲げ剛性 $EI_{stringer}$ を外板の幅 b (ストリンガ・ピッチ) に均一に分布させて等価な曲げ剛性を次のように表すことができる. ただし, 板の曲げ剛性はストリンガの曲げ剛性に比べて非常に小さいので無視できる.

$$D_{eff} = D_{skin} + \frac{EI_{stringer}}{b} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{EI_{stringer}}{b} \cong \frac{EI_{stringer}}{b}$$

$$\chi_1(2\alpha) = \frac{\cosh 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}, \quad \chi_2(2\alpha) = \frac{\sinh 2\alpha - \sin 2\alpha}{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}, \quad \chi_3(2\alpha) = \frac{\cosh 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sinh 2\alpha + \sin 2\alpha}$$

もうひとつのケースとしてフレームを模擬して, ④半径 R , 断面積 A のリングに単位長さあたり P の半径方向荷重が働くケースを考える (図 4-116). この荷重ケースの解は,

- ④ リングに半径方向の一樣な荷重が負荷されるケース

$$(w)^{④} = \frac{PR^2}{AE}$$

$$f_{ring} = \frac{PR}{A}$$

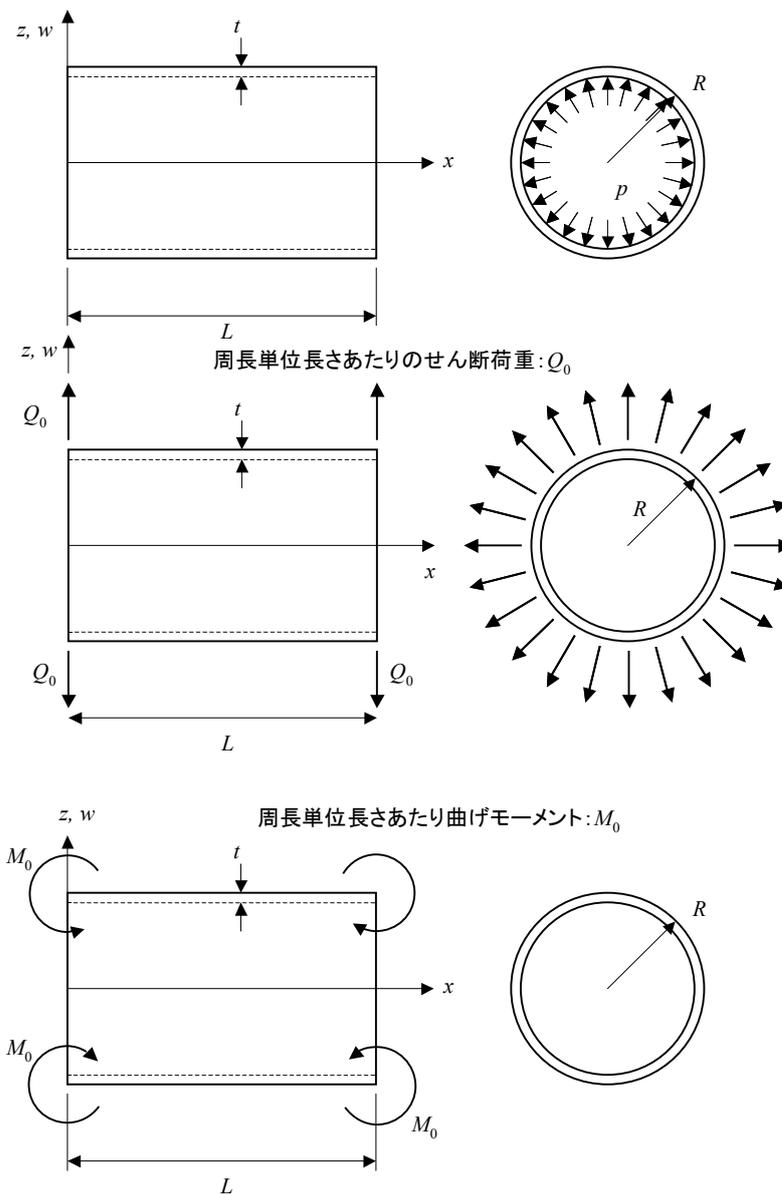


図 4-115 長さ L の円筒の荷重ケース

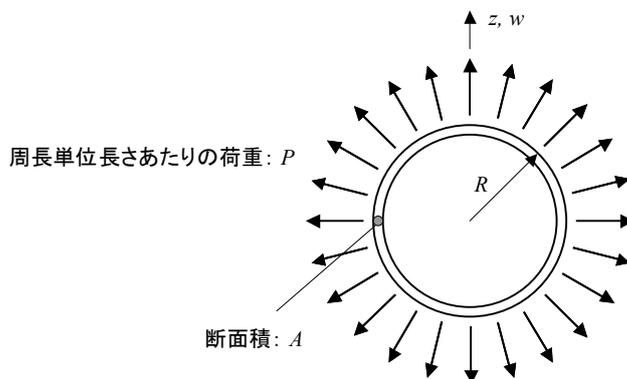


図 4-116 リングに働く荷重

フレーム／ストリングからなる胴体構造は図 4-117 のようにモデル化できるので、上記の基本解を図のように組み合わせることで、解が得られる。

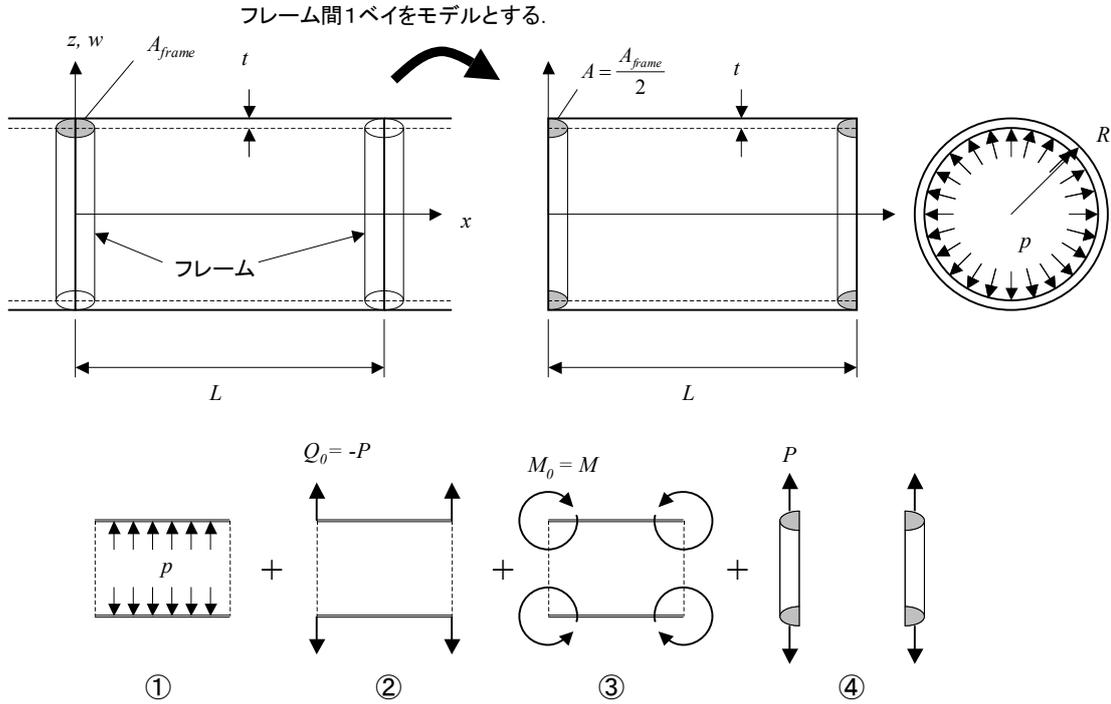


図 4-117 フレーム／ストリングからなる胴体のモデル

②と③を足し合わせたとき、 $x=0$ で傾きがゼロの条件を使うと、

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0}^{②} + \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0}^{③} = -\frac{2P\beta^2 R^2}{Et} \chi_2(2\alpha) + \frac{4M\beta^3 R^2}{Et} \chi_3(2\alpha) = 0$$

$$M = \frac{P}{2\beta} \frac{\chi_2(2\alpha)}{\chi_3(2\alpha)}$$

②と③を足し合わせたときの $x=0$ での変位は、

$$(w)_{x=0}^{②} + (w)_{x=0}^{③} = \frac{2P\beta R^2}{Et} \chi_1(2\alpha) - \frac{2M\beta^2 R^2}{Et} \chi_2(2\alpha) = \frac{P\beta R^2}{Et} \left[2\chi_1(2\alpha) - \frac{\chi_2^2(2\alpha)}{\chi_3(2\alpha)} \right]$$

端 ($x=0$) での変位の条件は、

$$(w)^\text{①} - [(w)_{x=0}^{②} + (w)_{x=0}^{③}] = (w)^\text{④}$$

これを書き換えると、

$$\frac{pR^2}{Et} - \frac{P\beta R^2}{Et} \left[2\chi_1(2\alpha) - \frac{\chi_2^2(2\alpha)}{\chi_3(2\alpha)} \right] = \frac{PR^2}{AE}$$

となり、フレームの断面の半分 $A = \frac{A_{frame}}{2}$ が受け持つ半径方向の荷重 P の式が次のように得られる。

$$P = \frac{p}{\frac{t}{A} + \beta \left[2\chi_1(2\alpha) - \frac{\chi_2^2(2\alpha)}{\chi_3(2\alpha)} \right]}$$

この式は外板の軸方向の応力がゼロの場合であるが、胴体の両端から軸方向の荷重がかかる場合には、周方向の変位 $w^{\textcircled{1}} = \frac{pR^2}{Et}$ が $w^{\textcircled{1}} = \frac{pR^2}{Et} \left[1 - \frac{\nu}{2 \left(1 + \frac{A_{stringer}}{bt} \right)} \right]$ となるので、上の式で p の代わりに $p' = p \left[1 - \frac{\nu}{2 \left(1 + \frac{A_{stringer}}{bt} \right)} \right]$ を

使えばよい。

フレームの断面の半分が受け持つ周方向荷重は、

$$P_{hoop} = PR = \frac{pR}{\frac{t}{A} + \beta \left[2\chi_1(2\alpha) - \frac{\chi_2^2(2\alpha)}{\chi_3(2\alpha)} \right]}$$

フレームが分担する与圧荷重の割合は、

$$\frac{2P_{hoop}}{pRL} = \frac{p}{\left\langle \frac{t}{A} + \beta \left[2\chi_1(2\alpha) - \frac{\chi_2^2(2\alpha)}{\chi_3(2\alpha)} \right] \right\rangle L}$$

ストリンガがある場合には、 D_{eff} への板の曲げ剛性の寄与は非常に小さいので、フレームが分担する荷重はストリンガが分担する与圧荷重と考えてよい。

数値計算例を表 4-20 に示す。

表 4-20 フレーム（ストリンガ）が受け持つ与圧荷重の計算例 – 円筒殻理論

寸法

胴体半径	R	(mm)	2900
ストリンガ本数	n		86
ストリンガ間隔	b	(mm)	211.9
ストリンガ間隔(角度)	theta	(radian)	0.07306
	theta	(degree)	4.18605
フレーム間隔	L	(mm)	550
胴体外板板厚	t	(mm)	1.27
ストリンガ断面2次モーメント	I_stringer	(mm ⁴)	12046
フレーム断面積	A_frame	(mm ²)	350
外板等価曲げ剛性	Deff	(N-mm)	3979876

材料

ヤング率	E	(MPa)	70000
------	---	-------	-------

与圧荷重と単純計算によるフープ荷重

与圧	p	(psi)	18
	p	(N/mm ²)	0.1241
フープ荷重	pR	(N/mm)	359.9
フレーム間のフープ荷重合計	pRL	(N)	197964

計算

パラメータ	β		0.0050763
	α		1.3959721
	2*α		2.7919442
	χ1		0.8558432
	χ2		0.9190938
χ3		1.0777287	
1/2 フレームの断面積	A	(mm ²)	175
1/2 フレームの半径方向荷重	P	(N/mm)	10.371
1/2 フレームのフープ荷重	P_hoop	(N)	30077
フレームが分担する与圧荷重の割合	2*P_hoop/(pRL)		0.3039

4.7.6.2 エネルギー法による解法

次に、最小ポテンシャル・エネルギーの原理を使ってストリングが受け持つ荷重を求める方法を説明する。この方法は、外板の板厚が胴体の長手方向に変化する場合にも使える。円形断面の胴体を考え、胴体外板の半径方向の変位は全周にわたって一定であると仮定する。軸方向の応力は無視する。（軸方向の荷重を受け持つ場合は、圧力に前項で述べた補正をしてやればよい。）

変位の胴体軸方向の分布（図 4-118）は、フレーム位置とフレーム中央位置では傾きゼロであるので、変位を次の式で仮定する。 L はフレームの間隔、 x は胴体の軸方向にとった座標、 y は半径方向の変位である。 a_0, a_1, a_2, \dots は変位の大きさを表すパラメータであり、全ポテンシャル・エネルギーの最小化の際に変化させるパラメータとなる。

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cos \frac{2i\pi}{L} x$$

微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = -\sum_{i=1}^n \frac{2i\pi a_i}{L} \sin \frac{2i\pi}{L} x$$

もう一度微分すると、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sum_{i=1}^n \frac{4i\pi^2 a_i}{L^2} \cos \frac{2i\pi}{L} x$$

ストリング 1 本を含む周方向幅 b 、軸方向長さ $L/2$ ($x=0 \sim L/2$) の 1 区画の全ポテンシャル・エネルギーを求める。ストリングの曲げ剛性を EI とすると、ストリングの歪エネルギー $U_{stringer}$ は、

$$U_{stringer} = \int_0^{L/2} \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx = \sum_{i=1}^n \frac{EI_i}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_i^2 \Delta x_i$$

フレームの断面積を A_{frame} とすると、フレームの周方向の歪 ε_{frame} は、

$$\varepsilon_{frame} = \frac{2\pi(R+y(0)) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{y(0)}{R}$$

フレームの周長 b あたりの歪エネルギー U_{frame} は、

$$U_{frame} = \int_V \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_{frame}^2 \right) dV = \frac{1}{2} E \varepsilon_{frame}^2 \frac{A_{frame}}{2} b$$

外板の周方向の歪 ε_{skin} はフレームの周方向の歪と同じ形で、

$$\varepsilon_{skin} = \frac{2\pi(R+y) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{y}{R}$$

外板の周長 b あたりの歪エネルギー U_{skin} は

$$U_{skin} = \int_V \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_{skin}^2 \right) dV = \int_0^{L/2} \left(\frac{1}{2} E \varepsilon_{skin}^2 b t \right) dx = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} E b t \left(\frac{y_i}{R} \right)^2 \Delta x_i \right\}$$

周長 b あたりの外力による仕事 W は、

$$W = \int_0^{L/2} p y dx = \sum_{i=1}^n p y_i \Delta x_i$$

全ポテンシャル・エネルギー U_{total} は、

$$U_{total} = U_{stringer} + U_{frame} + U_{skin} - W$$

MS-Excel の「ソルバー」を使って全ポテンシャル・エネルギーを最小化することにより、変位パラメータ a_0, a_1, a_2, \dots を決めることができる。

外板の単位長さあたりの周方向荷重 N_{hoop} は、

$$N_{hoop} = E \varepsilon_{skin} t = \frac{E t y}{R}$$

ストリングに働く単位長さあたりの面外荷重 w は、次の式で計算できる。

$$w = 2(pR - N_{hoop}) \sin \frac{\theta}{2}$$

計算例を表 4-21, 図 4-119, 図 4-120 に示す. 寸法は表 4-20 と同じとした. $n=10$ とした. スtring (フレーム) が受け持つ与圧荷重の割合 (0.3038) は円筒殻の理論で計算した値 (0.3039) とほとんど一致しており, この計算法の妥当性を確認できる. この計算例では, 外板の周方向応力はフレーム間の中央で高くなり (0.773), 平均値 (0.696) より 11%大きくなっている.

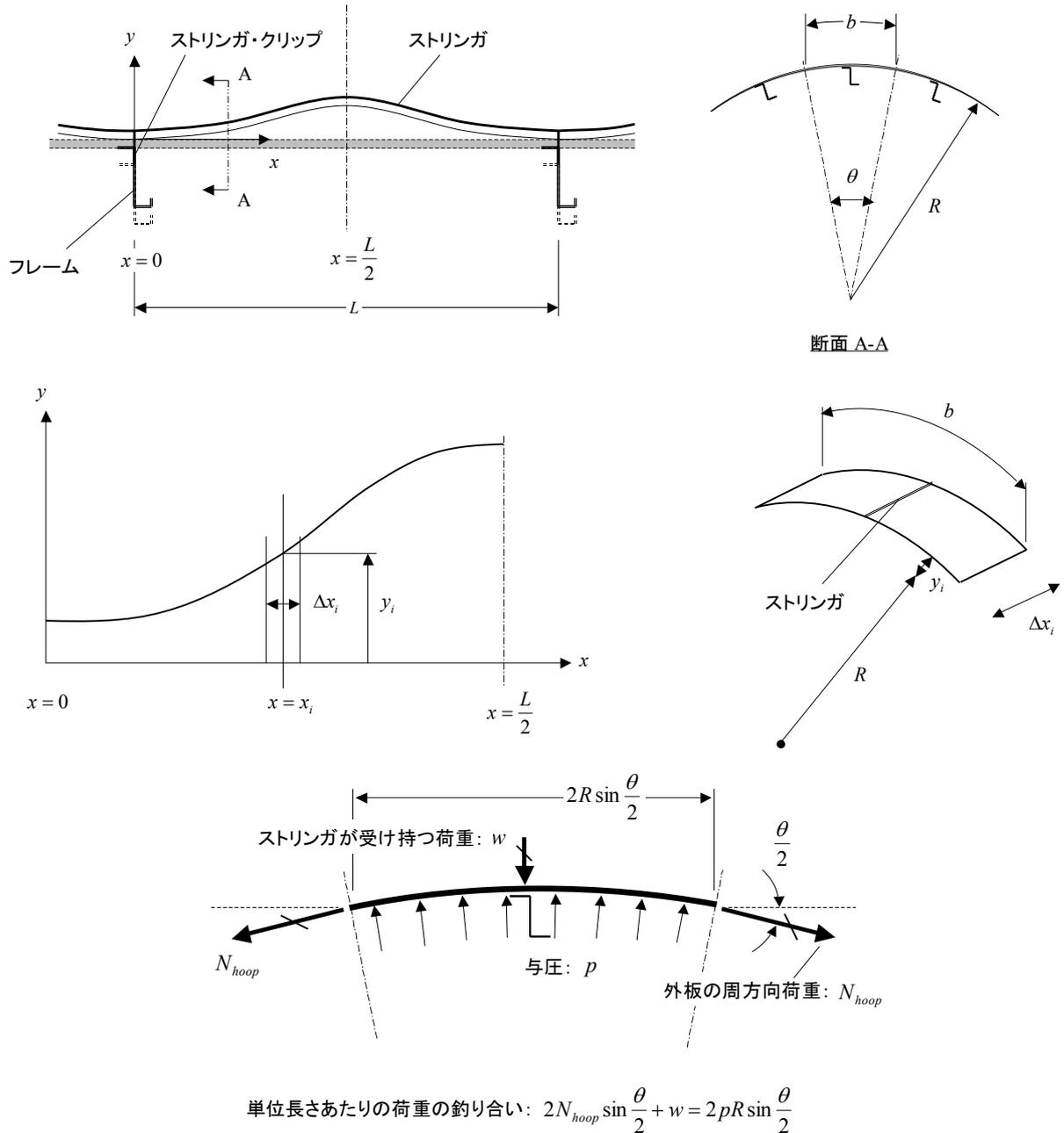


図 4-118 スtring が受け持つ与圧荷重の計算モデル

表 4-21 胴体ストリングが受け持つ圧荷重の計算例

寸法		変位の微分		半径方向変位			ストリングの曲げモーメント
胴体半径	R (mm)	d2y/dx2 (1/mm)	dy/dx (mm/mm)	xi (mm)	y (mm)	yi (mm)	U_stringer (N-mm)
ストリング本数	2900	0.000E+00	0.000E+00	0	7.119	7.119	-175315.2
ストリング間隔	86	0.01	1.138E-03	5.5	7.122	7.120	-172646.9
ストリング間隔(角度)	211.9	0.02	2.047E-04	11	7.131	7.127	93.0
	0.0730603	0.03	1.958E-04	16.5	7.146	7.139	-165090.2
	4.1860465	0.04	1.825E-04	22	7.167	7.157	-153870.3
フレーム間隔	550	0.05	1.668E-04	27.5	7.193	7.180	-140670.0
胴体外板板厚	1.27	0.06	1.509E-04	33	7.223	7.208	-127205.4
ストリング断面積	111.75	0.07	1.362E-04	38.5	7.258	7.241	-114822.9
ストリング断面2次モーメント	12046.2	0.08	1.236E-04	44	7.296	7.277	-104233.0
フレーム断面積	350	0.09	1.132E-04	49.5	7.338	7.317	-95447.3
		0.1	1.043E-04	55	7.382	7.360	-87920.3
ヤング率	E (MPa)	0.12	9.586E-05	60.5	7.432	7.432	-80834.1
	70000	0.14	8.661E-05	77	7.588	7.534	-65230.1
		0.16	7.736E-05	88	7.702	7.645	-46784.2
与圧	p (psi)	0.18	6.842E-05	99	7.820	7.761	9.3
	18	0.2	4.482E-05	110	7.941	7.880	3.1
与圧荷重	p (N/mm^2)	0.22	2.574E-05	121	8.062	8.001	0.5
与圧荷重	pR (N/mm)	0.24	1.067E-05	132	8.181	8.121	0.0
与圧荷重	pR/t (MPa)	0.26	-2.580E-06	143	8.298	8.240	0.0
与圧荷重	eps (mm/mm)	0.28	-1.632E-05	154	8.411	8.354	1.2
与圧荷重	delta (mm)	0.3	-3.006E-05	165	8.518	8.464	4.2
		0.32	-4.179E-05	176	8.618	8.568	8.1
		0.34	-5.109E-05	187	8.710	8.664	12.1
		0.36	-5.952E-05	198	8.794	8.752	16.4
		0.38	-6.819E-05	209	8.868	8.831	21.6
		0.4	-7.725E-05	220	8.932	8.900	27.0
		0.42	-8.680E-05	231	8.985	8.958	31.5
		0.44	-9.683E-05	242	9.027	9.006	34.9
		0.46	-1.070E-04	253	9.057	9.042	38.3
		0.48	-1.181E-04	264	9.075	9.066	41.8
		0.5	-1.306E-04	275	9.081	9.078	44.7
合計							83780.8
							61212.1
							67389.0
							71565.4
							74814.3
							78364.3
							81803.0
							83780.8
							84071.2
							83895.3

定数	a0 (mm)	8.1746032
cos(2pi/L*x)の係数	a1 (mm)	-0.9648182
cos(4pi/L*x)の係数	a2 (mm)	-0.0691689
cos(6pi/L*x)の係数	a3 (mm)	-0.0136553
cos(8pi/L*x)の係数	a4 (mm)	-0.0042535
cos(10pi/L*x)の係数	a5 (mm)	-0.0017409
cos(12pi/L*x)の係数	a6 (mm)	-0.000985
cos(14pi/L*x)の係数	a7 (mm)	-0.0005379
cos(16pi/L*x)の係数	a8 (mm)	-0.0003637
cos(18pi/L*x)の係数	a9 (mm)	-0.0002483
cos(20pi/L*x)の係数	a10 (mm)	-0.0001549

変形パラメータ		
定数	a0 (mm)	8.1746032
cos(2pi/L*x)の係数	a1 (mm)	-0.9648182
cos(4pi/L*x)の係数	a2 (mm)	-0.0691689
cos(6pi/L*x)の係数	a3 (mm)	-0.0136553
cos(8pi/L*x)の係数	a4 (mm)	-0.0042535
cos(10pi/L*x)の係数	a5 (mm)	-0.0017409
cos(12pi/L*x)の係数	a6 (mm)	-0.000985
cos(14pi/L*x)の係数	a7 (mm)	-0.0005379
cos(16pi/L*x)の係数	a8 (mm)	-0.0003637
cos(18pi/L*x)の係数	a9 (mm)	-0.0002483
cos(20pi/L*x)の係数	a10 (mm)	-0.0001549

与圧荷重と単純計算によるフープ応力		
与圧	p (psi)	18
与圧	p (N/mm^2)	0.1241
フープ荷重	pR (N/mm)	359.9
フープ応力	pR/t (MPa)	283.4
外板フープ歪	eps (mm/mm)	0.00405
半径方向の変位	delta (mm)	11.74

ポテンシャル・エネルギー		
全ポテンシャル・エネルギー	Utotal (N-mm)	-29557

表 4-21 胴体ストリಂಗが受け持つ圧荷重の計算例 (つづき)

x/L	xi/L	x (mm)	xi (mm)	フレームの歪	外板の歪	フレームの歪エネルギー	外板の歪エネルギー	外力による仕事	フープ荷重	ノーマライズしたフープ荷重	ストリंगाの面外荷重	ノーマライズしたストリंगाの面外荷重	外板のフープ荷重
				e_frame (mm/mm)	e_skin (mm/mm)	U_frame (N-mm)	U_skin (N-mm)	p*ytb*delta x (N-mm)	N_hoop (N/mm)	N_hoop/pR	w (N/mm)	w/pb	N_hoop*delta xi (N)
0		0		0.00245		7819.9							
0.01	0.005	5.5	2.75		0.00246		312.3	1030	218.28	0.606	10.35	0.393	1200.5
0.02	0.015	11	8.25		0.00246		312.8	1031	218.47	0.607	10.33	0.393	1201.6
0.03	0.025	16.5	13.75		0.00246		313.9	1033	218.84	0.608	10.31	0.392	1203.6
0.04	0.035	22	19.25		0.00247		315.5	1035	219.39	0.610	10.27	0.390	1206.7
0.05	0.045	27.5	24.75		0.00248		317.5	1038	220.11	0.612	10.21	0.388	1210.6
0.06	0.055	33	30.25		0.00249		320.0	1043	220.97	0.614	10.15	0.386	1215.3
0.07	0.065	38.5	35.75		0.00250		322.9	1047	221.96	0.617	10.08	0.383	1220.8
0.08	0.075	44	41.25		0.00251		326.1	1052	223.08	0.620	10.00	0.380	1226.9
0.09	0.085	49.5	46.75		0.00252		329.7	1058	224.30	0.623	9.91	0.377	1233.6
0.1	0.095	55	52.25		0.00254		333.6	1065	225.62	0.627	9.81	0.373	1240.9
0.12	0.11	66	60.5		0.00256		680.3	2150	227.81	0.633	9.65	0.367	2506.0
0.14	0.13	77	71.5		0.00260		699.2	2179	230.96	0.642	9.42	0.358	2540.6
0.16	0.15	88	82.5		0.00264		719.9	2211	234.36	0.651	9.17	0.349	2577.9
0.18	0.17	99	93.5		0.00268		742.0	2245	237.92	0.661	8.91	0.339	2617.1
0.2	0.19	110	104.5		0.00272		765.0	2280	241.58	0.671	8.65	0.329	2657.3
0.22	0.21	121	115.5		0.00276		788.6	2314	245.27	0.681	8.38	0.318	2698.0
0.24	0.23	132	126.5		0.00280		812.5	2349	248.96	0.692	8.11	0.308	2738.6
0.26	0.25	143	137.5		0.00284		836.3	2383	252.59	0.702	7.84	0.298	2778.5
0.28	0.27	154	148.5		0.00288		859.8	2417	256.11	0.712	7.58	0.288	2817.2
0.3	0.29	165	159.5		0.00292		882.5	2448	259.47	0.721	7.34	0.279	2854.2
0.32	0.31	176	170.5		0.00295		904.2	2478	262.64	0.730	7.11	0.270	2889.1
0.34	0.33	187	181.5		0.00299		924.7	2506	265.60	0.738	6.89	0.262	2921.6
0.36	0.35	198	192.5		0.00302		943.6	2532	268.30	0.745	6.69	0.255	2951.3
0.38	0.37	209	203.5		0.00305		960.6	2554	270.71	0.752	6.52	0.248	2977.9
0.4	0.39	220	214.5		0.00307		975.7	2574	272.83	0.758	6.36	0.242	3001.1
0.42	0.41	231	225.5		0.00309		988.5	2591	274.62	0.763	6.23	0.237	3020.8
0.44	0.43	242	236.5		0.00311		999.0	2605	276.07	0.767	6.13	0.233	3036.8
0.46	0.45	253	247.5		0.00312		1007.0	2615	277.17	0.770	6.05	0.230	3048.9
0.48	0.47	264	258.5		0.00313		1012.4	2622	277.91	0.772	5.99	0.228	3057.0
0.5	0.49	275	269.5		0.00313		1015.1	2626	278.28	0.773	5.96	0.227	3061.1
合計						7819.9	20721.4	59114			250.39		68911.4
												外板が分担する圧荷重の割合	0.6962
												ストリंगाが分担する圧荷重の割合	0.3038

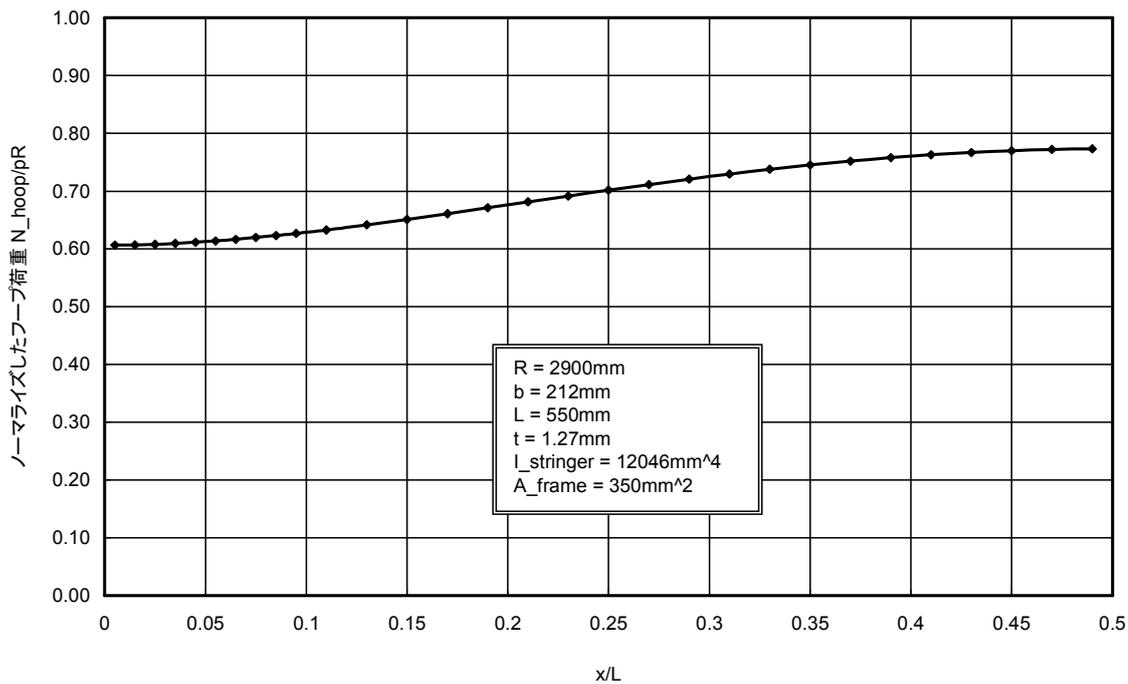


図 4-119 外板の周方向荷重の分布

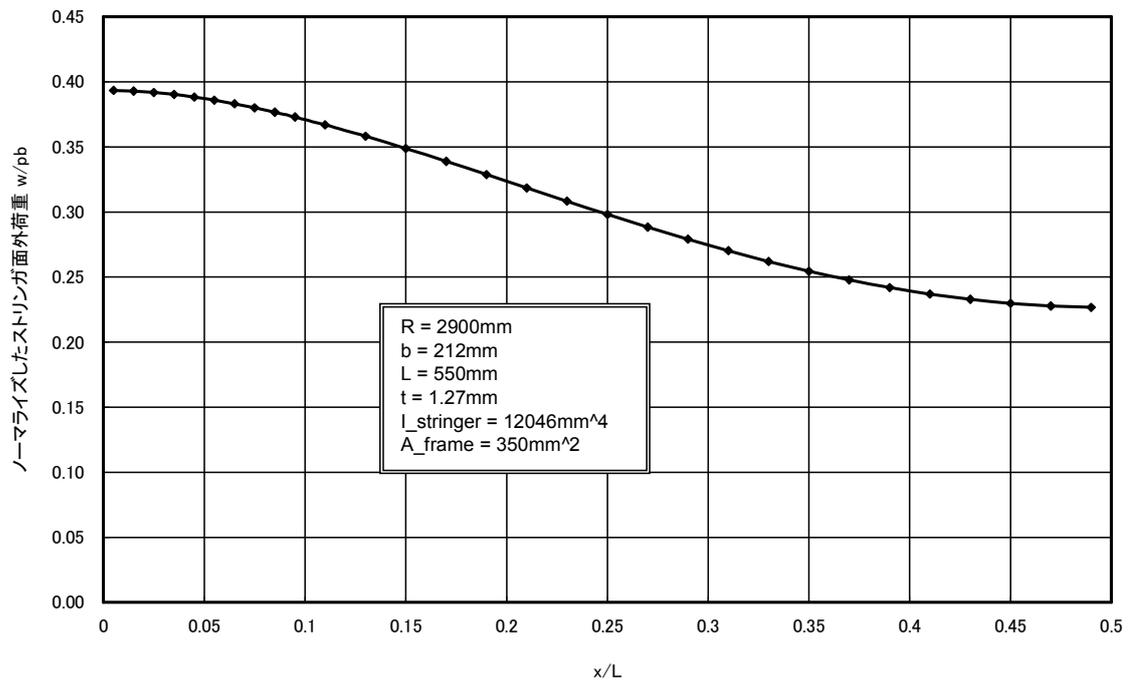


図 4-120 ストリンガの面外荷重の分布

4.7.7 平板耐圧隔壁

与圧胴体の一部には平面で与圧を受け持つ部位がある。たとえば、胴体の両端や床構造である（図 4-121）。これらの構造を耐圧隔壁（Pressure Bulkhead）と呼ぶ。平板状の耐圧構造は、板（Web）を縦横に補強材で区切っている。基本になる長方形平板の面外曲げの解析解について説明した後耐圧隔壁の構造要素の内部荷重について説明する。



Boeing 727-200 の胴体後方耐圧隔壁



C-17 の操縦席耐圧床

図 4-121 耐圧隔壁の例

4.7.7.1 圧力が負荷される長方形平板

長方形の板に面外荷重（圧力）が負荷される問題を考える。周辺支持条件は、単純支持と固定の2種類を考える（図 4-122）。板の寸法を a, b ($a \geq b$)、板厚を t 、圧力を p 、ヤング率を E 、ポアソン比を ν とする。

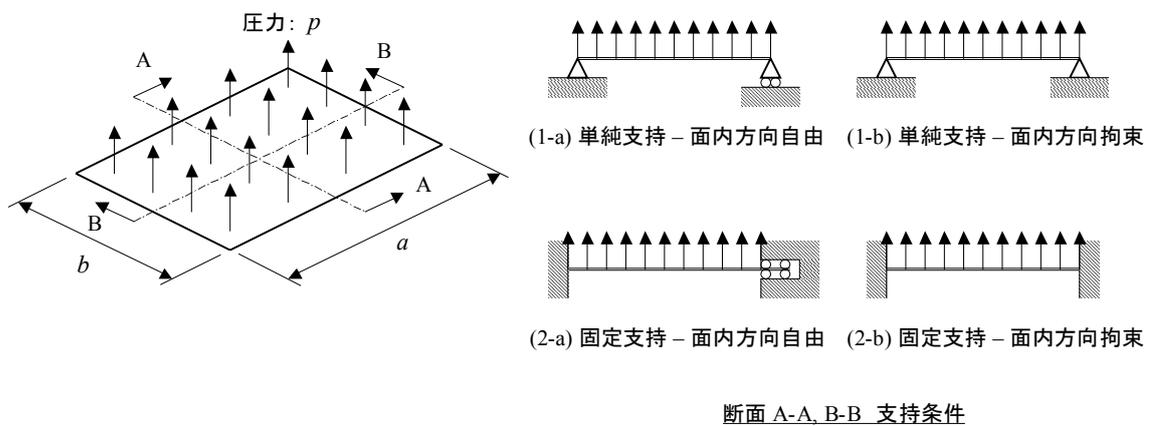


図 4-122 面外荷重を受ける長方形平板

この問題の平板の曲げ理論による線形解（微小変形の場合，中央の変位が板厚の 40%以下）は以下のような（Roark（文献[2-11]），ESDU 71013（文献[2-13]）による）。

(1) 周辺単純支持の場合（表 4-22，図 4-123，図 4-124）

- 板の中央の変位： $w_{\max} = \frac{\alpha(1-\nu^2)pb^4}{0.91Et^3}$
- 最大曲げ応力（板の中央）： $f_{\max} = \frac{\beta pb^2}{t^2}$

表 4-22 圧力を受ける平板（微小変形）－ 周辺単純支持

a/b	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0	4.0	5.0	∞
β	0.2874	0.3762	0.4530	0.5172	0.5688	0.6102	0.7134	0.7410	0.7476	0.7500
α	0.0444	0.0616	0.0770	0.0906	0.1017	0.1110	0.1335	0.1400	0.1417	0.1421

(2) 周辺固定支持の場合（表 4-23，図 4-123，図 4-124）

- 板の中央の変位： $w_{\max} = \frac{\alpha(1-\nu^2)pb^4}{0.91Et^3}$
- 最大曲げ応力（長辺の中央）： $f_{\max} = \frac{\beta_1 pb^2}{t^2}$
- 最大曲げ応力（板の中央）： $f_{\max} = \frac{\beta_2 pb^2}{t^2}$

表 4-23 圧力を受ける平板（微小変形）－ 周辺固定支持

a/b	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	∞
β_1	0.3078	0.3834	0.4356	0.4680	0.4872	0.4974	0.5000
β_2	0.1386	0.1794	0.2094	0.2286	0.2406	0.2472	0.2500
α	0.0138	0.0188	0.0226	0.0251	0.0267	0.0277	0.0284

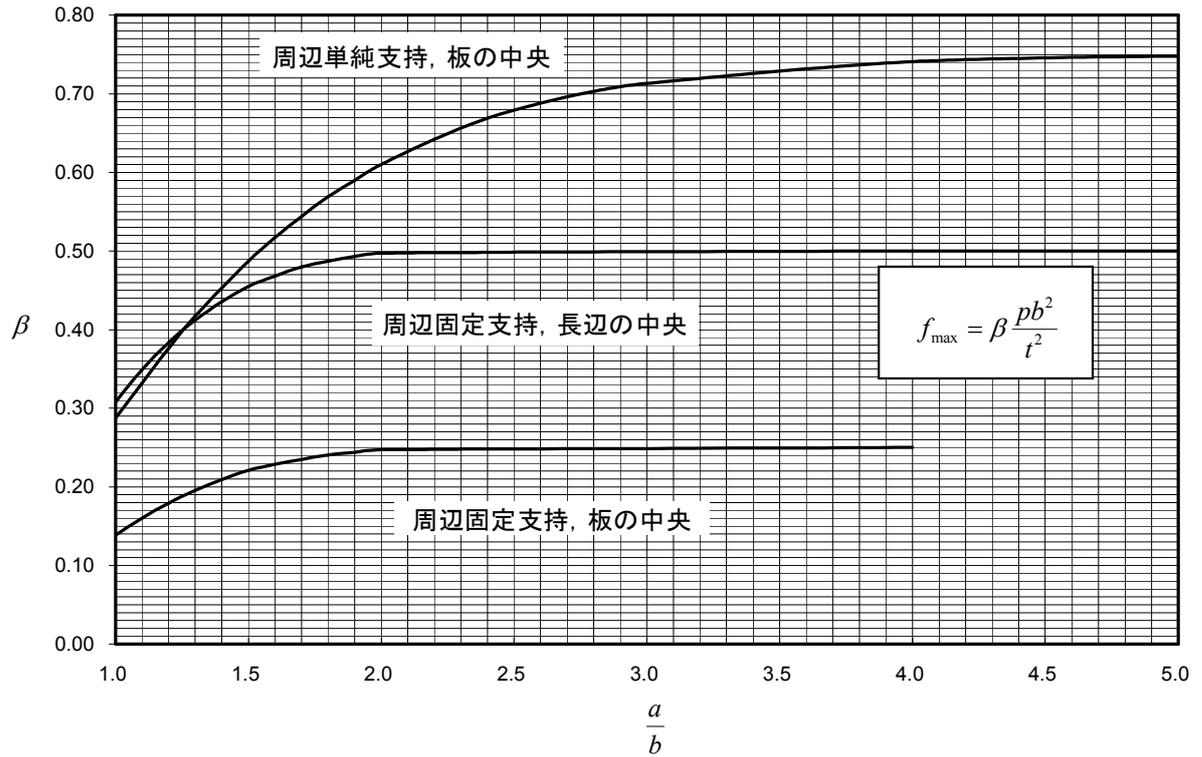


図 4-123 圧力を受ける長方形平板の応力 - 微小変形

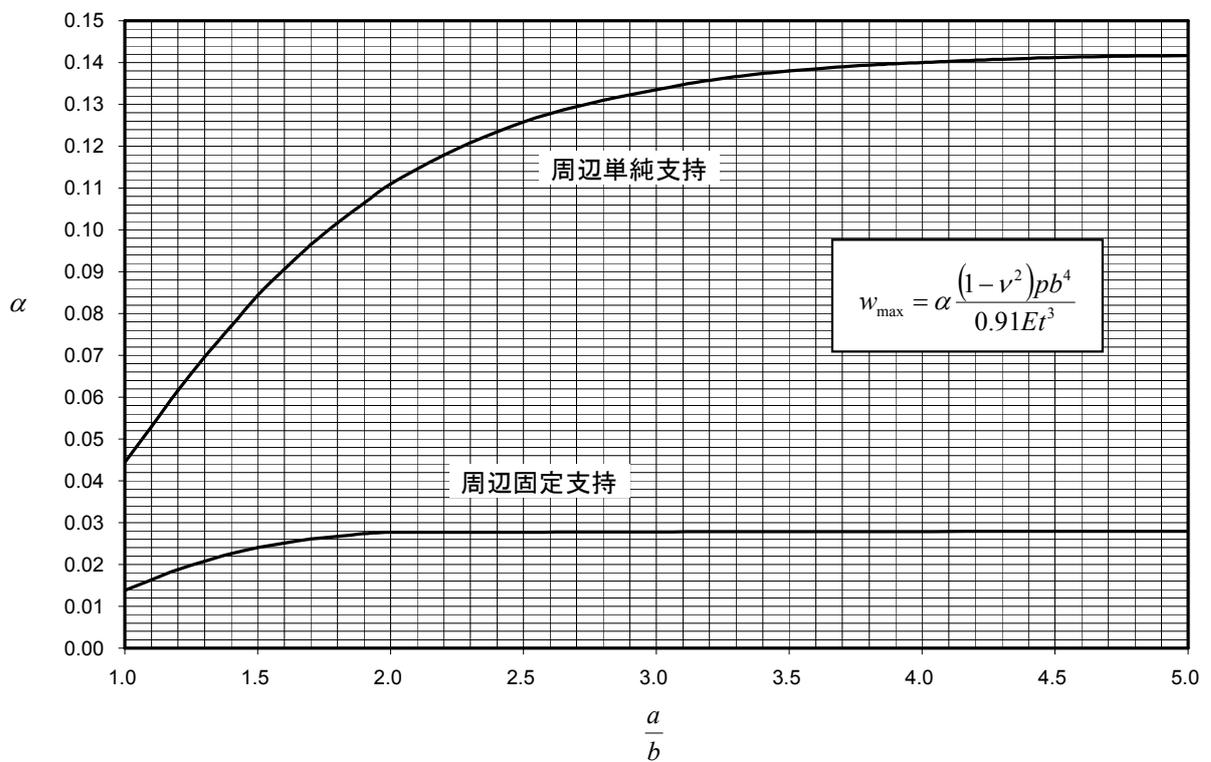


図 4-124 圧力を受ける長方形平板の中央のたわみ - 微小変形

板の中央の面外変位が板厚の 40%程度を越すと、板の面内応力が傾くため、面内応力が外荷重である圧力に対抗するようになるので、面外変形の増加が抑えられる。この効果（ダイヤフラム効果）を考慮した理論が平板の大たわみ理論である（図 4-125）。大たわみ理論では、周辺支持条件に面内方向の支持条件も与えてやる必要がある（図 4-122）。実際の構造では面内変形を拘束した場合に近い状態になる。面内変形を拘束した場合の大たわみ理論の解が ESDU 71013（文献[2-13]）、Roark の本（文献[2-11]）に載っているが、ESDU のデータのほうが精度が高いのでそちらを使ったほうがよい。

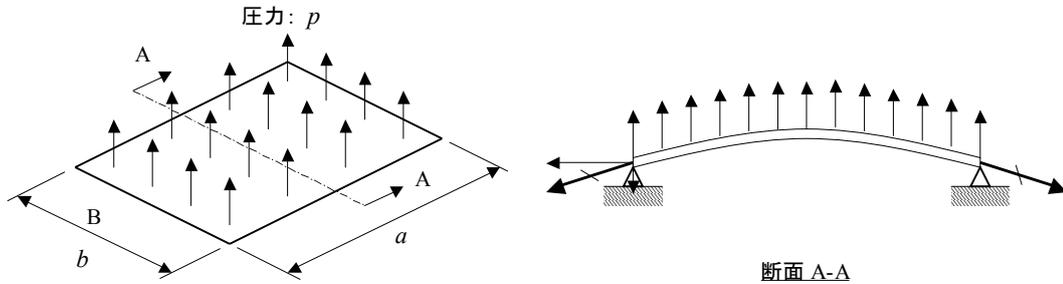


図 4-125 板の大たわみの影響

板の縦横比が大きくなると ($a/b > 2.0$)、パラメータ α, β が a/b に影響されなくなる。すなわち、荷重のほとんどが長辺に流れるようになり、板の中央部は図 4-126 に示すような梁と考えることができる。単位幅の梁に圧力が負荷される場合の幾何学的非線形解析を行うことで大たわみの板の中央部の応力分布と変位分布を求めることができる。等価な梁は、単位幅×高さ t の矩形断面で、等価ヤング率 E' を $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ とし、単位長さあたり p の一様分布荷重が負荷されると考える（文献[2-12]）。板厚が一樣でない板の場合にも、この簡略化の考え方を適用することができる。一定板厚の場合の計算式は文献[2-12]に載っており、以下のとおりである。

(1) 周辺単純支持、面内変形拘束ありの場合、 $a/b > 2$

$$\chi_0(u) = \frac{5}{256} \frac{\tanh u}{u^9} + \frac{1}{256} \frac{\tanh^2 u}{u^8} - \frac{5}{256u^8} + \frac{1}{384u^6} = \frac{4E'^2 I^3}{pAb^8}$$

を解いてパラメータ u を求める。

ここで、 $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$

断面積： $A = t$

断面 2 次モーメント： $I = \frac{t^3}{12}$

面内荷重 T_0 と面内応力 f_{axial} は、

$$T_0 = \frac{4u^2 E' I}{b^2}, \quad f_{axial} = \frac{T_0}{A}$$

中央のたわみ w_{max} は、

$$w_{max} = \frac{pb^4}{16E'I} \frac{1}{u^4} - 1 + \frac{u^2}{2}$$

中央の曲げモーメント M_{max} と曲げ応力 f_{bend} は、

$$M_{\max} = \frac{pb^2}{4} \frac{1 - \frac{1}{\cosh u}}{u^2}, \quad f_{\text{bend}} = \frac{M_{\max} t}{2I}$$

中央の最大応力 f_{total} は

$$f_{\text{total}} = f_{\text{axial}} + f_{\text{bend}}$$

(2) 周辺固定支持, 面内変形拘束ありの場合, $a/b > 2$

$$\chi_1(u) = -\frac{3}{256u^7 \tanh u} - \frac{1}{256u^6 \sinh^2 u} + \frac{1}{64u^8} + \frac{1}{384u^6} = \frac{4E'^2 I^3}{p^2 Ab^8}$$

を解いてパラメータ u を求める.

面内荷重 T_0 と面内応力 f_{axial} は,

$$T_0 = \frac{4u^2 EI}{b^2}, \quad f_{\text{axial}} = \frac{T_0}{A}$$

中央のたわみ w_{\max} は,

$$w_{\max} = \frac{pb^4}{16E'Iu^4} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u}{\sinh u} - \frac{u}{\tanh u} \right)$$

曲げモーメントは固定端で最大となり, その曲げモーメント M_{\max} と曲げ応力 f_{bend} は,

$$M_{\max} = \frac{pb^3(u - \tanh u)}{4 \tanh u}, \quad f_{\text{bend}} = \frac{M_{\max} t}{2I}$$

固定端の最大応力 f_{total} は

$$f_{\text{total}} = f_{\text{axial}} + f_{\text{bend}}$$

以上の式を使って計算した長方形板 ($a/b = \infty$ の場合) の変位と応力を図 4-127, 図 4-128 に示す.

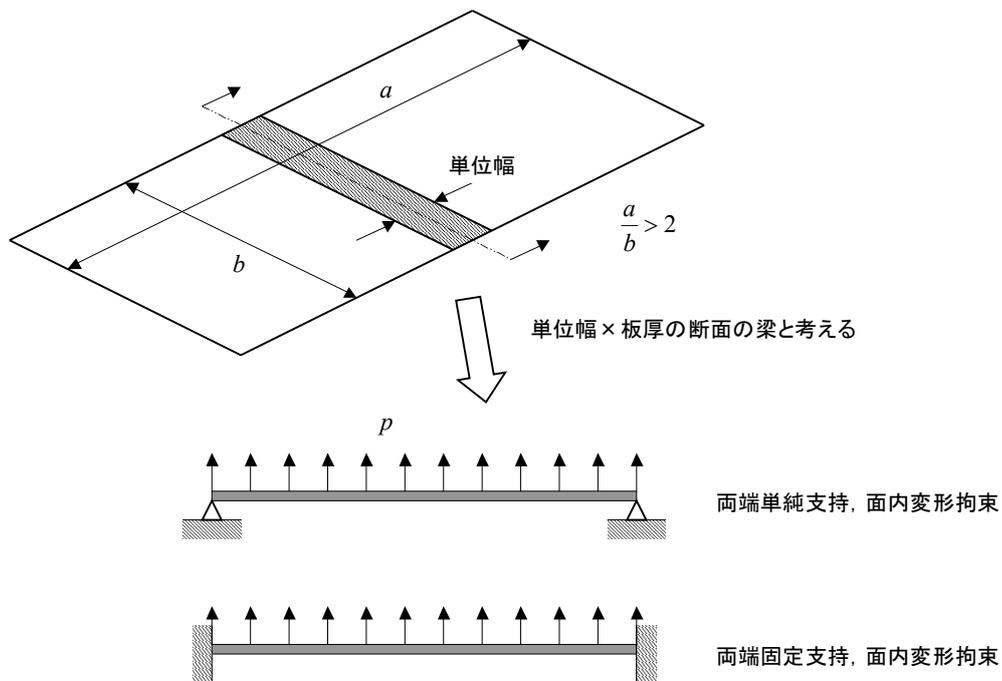


図 4-126 圧力を受ける平板 - 縦横比が大きい場合

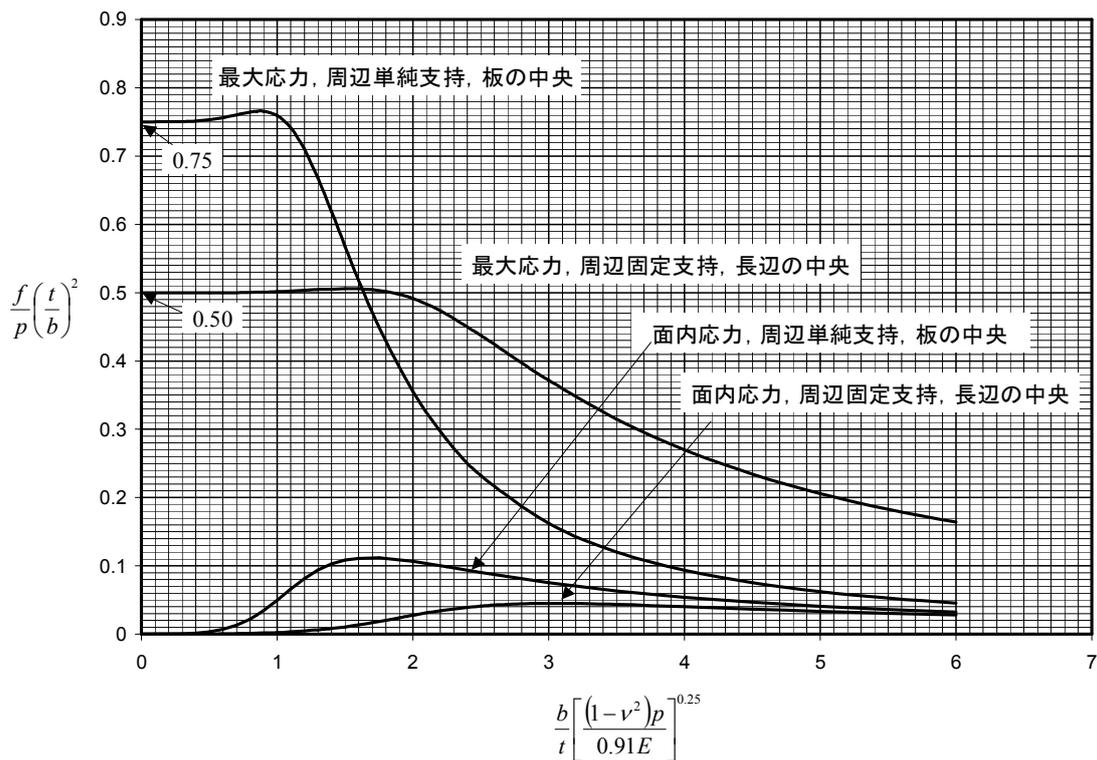


図 4-127 圧力を受ける平板の応力 - 大変形, 縦横比が大きい場合 ($a/b > 2.0$ に適用可)

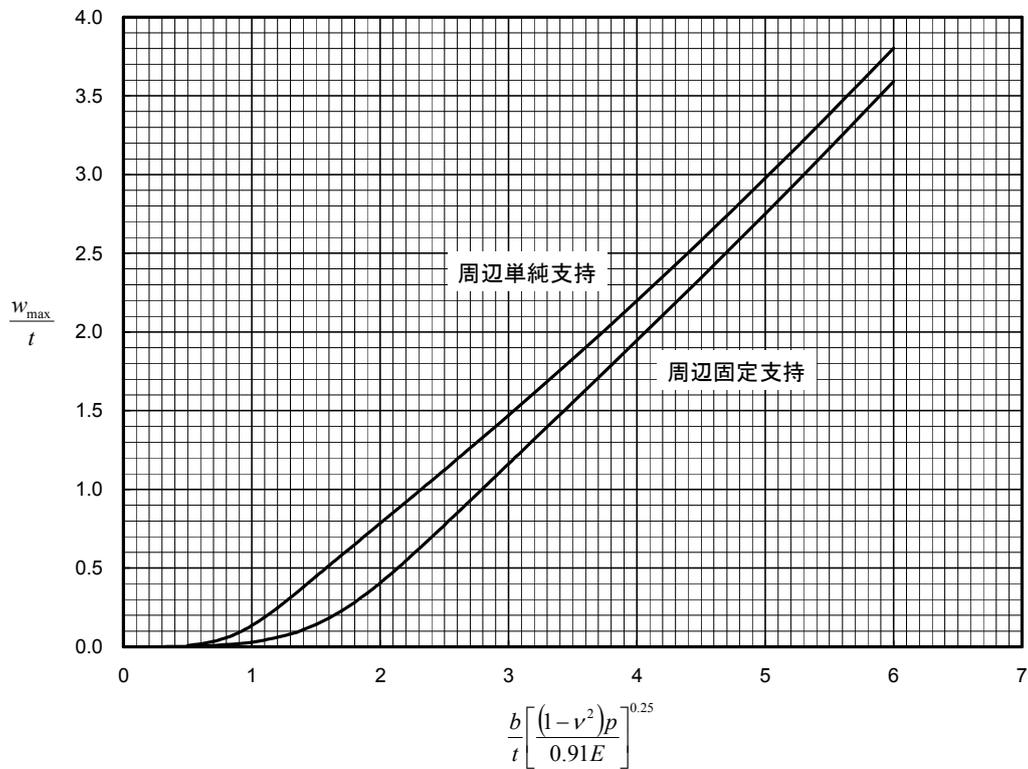


図 4-128 圧力を受ける平板の中央のたわみ - 大変形, 縦横比が大きい場合 ($a/b > 2.0$ に適用可)

4.7.7.2 平板耐圧隔壁の内部荷重

縦横に配置された補強材（ビームとスティフナ）とウェブからなる平板耐圧隔壁の構造概要と荷重の流れを図 4-129 に示す。ビームの曲げ剛性はスティフナの曲げ剛性に比べて大きいものとする。図中に示すウェブの六角形の領域に働く圧力の合計がスティフナに流れ、正方形の領域に働く圧力の合計がビームに働く。ビームの曲げ剛性が大きいので、スティフナは図 4-130 に示すようにビーム位置で固定された梁と考えることができる。ビームにはウェブからの圧力とスティフナの荷重が入る（図 4-131）。ビームは隔壁の端（通常は外板／フレームに結合される）で支持される。圧力の向きが図 4-129 の方向の場合には、スティフナとウェブを結合するファスナには、面外の引張荷重が入ることに注意すること。スティフナからビームへの荷重はビームのフランジ面への圧縮荷重である。圧力の向きが逆であると、スティフナとビームを結合するファスナに引張荷重が入るので注意すること。

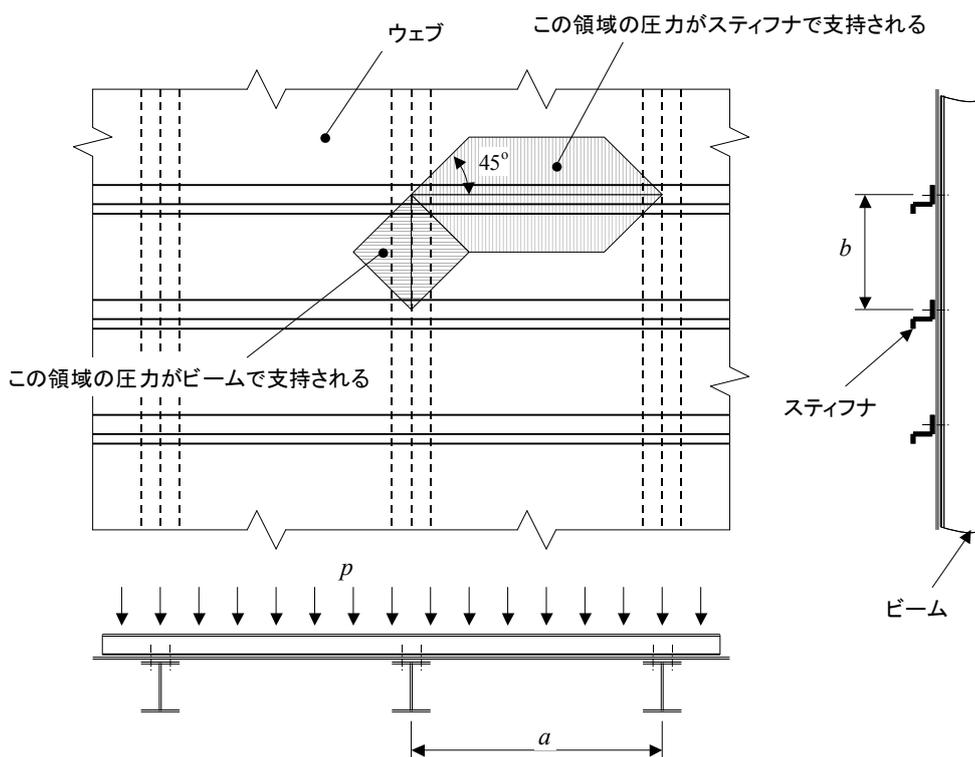


図 4-129 平板耐圧隔壁の荷重の流れ

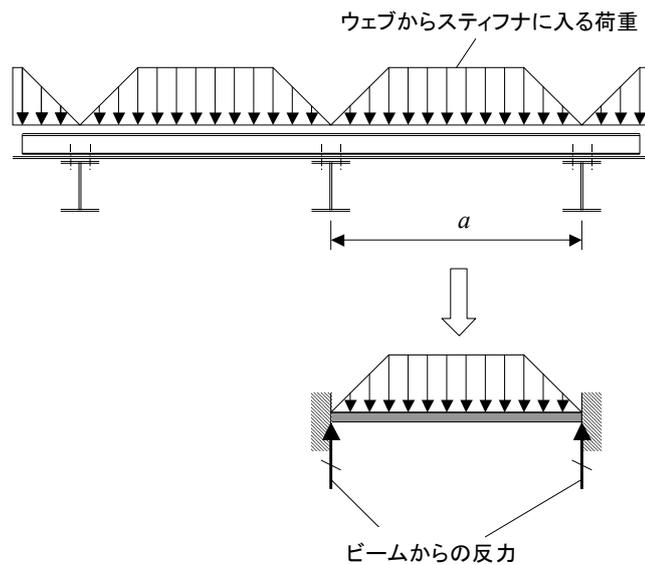


図 4-130 スティフナの荷重 - 平板耐圧隔壁

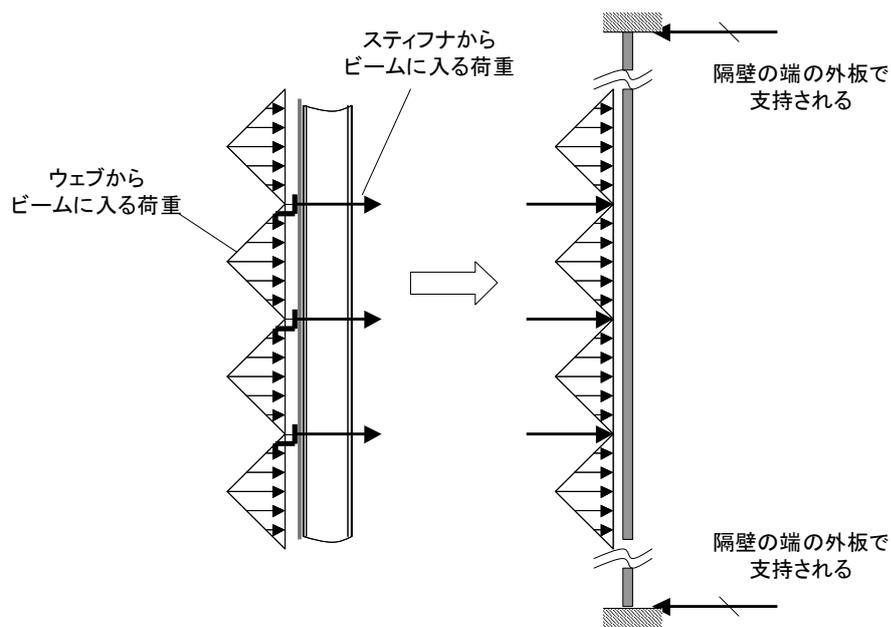


図 4-131 ビームの荷重 - 平板耐圧隔壁

4.7.8 リブのクラッシュ荷重 – Brazier 効果

主翼に揚力がかかると、上面外板に圧縮応力、下面外板に引張応力が発生して主翼が上方へ反る。外板が反っている状態で外板に軸応力がかかるので軸応力の向きの変化により、外板が翼の内部に引き込まれるような力（翼断面をつぶす力）が発生する（図 4-132）。これの Barzier 効果（Brazier Effect）と呼ぶ。翼断面がつぶれないようにするためにリブが必要であり、Brazier 効果によりリブに働く力をリブのクラッシュ荷重（Crashing Load on Rib）という。リブのクラッシュ荷重は、変形によって生じる荷重であるので、線形 FEM 解析では現れない荷重であることに注意されたい。

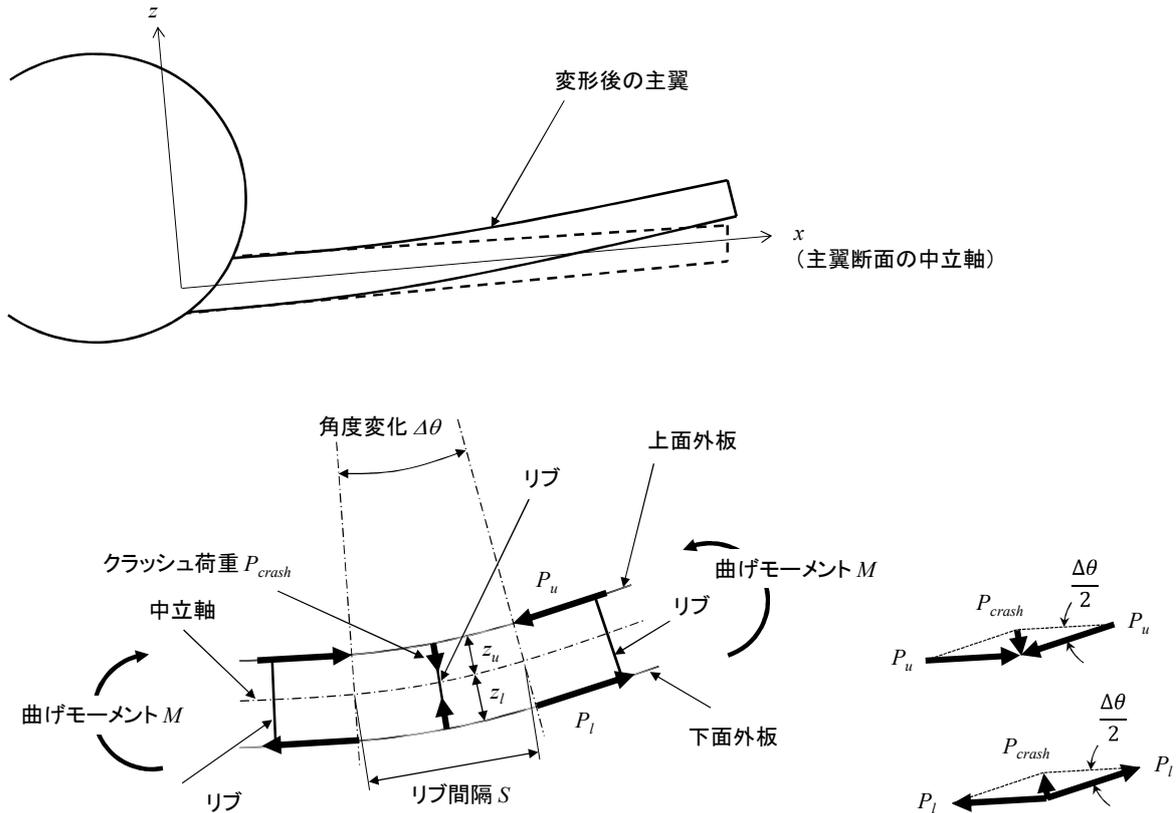


図 4-132 リブのクラッシュ荷重

リブのクラッシュ荷重の計算式を以下に示す（文献[2-81]）。

主翼に曲げモーメント M が働いているとする。リブ位置での主翼断面の断面 2 次モーメントを I 、上面外板と下面外板の重心の中立軸からの距離をそれぞれ z_u 、 z_l とする。梁の方程式（4.3.2 項）から、

$$\frac{\Delta\theta}{S} = \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

ここで、 E ：ヤング率

S ：リブ間隔

$\Delta\theta$ ：リブ間隔 S あたりの中立軸の反りの角度変化

上面外板と下面外板の応力 f_u と f_l は、

$$f_u = \frac{M}{I} z_u, \quad f_l = \frac{M}{I} z_l$$

上面外板と下面外板の軸力 P_u と P_l は、

$$P_u = A_u f_u, P_l = A_l f_l$$

ここで、 A_u : 上面外板の有効断面積 (ストリング断面積とスキンの有効断面積の合計 (主翼幅分))

A_l : 下面外板の有効断面積 (ストリング断面積とスキンの有効断面積の合計 (主翼幅分))

以上の式からクラッシュ荷重 (主翼幅分) を計算すると、

$$P_{crash} = P_u \Delta \theta = P_u \frac{SM}{EI} = P_u \frac{S}{E} \frac{f_u}{z_u} = P_u \frac{S}{E} \frac{A_u f_u}{A_u z_u} = \frac{SP_u^2}{EA_u z_u}$$

したがって、クラッシュ荷重 (主翼幅分) は次のように表すことができる。

$$P_{crash} = \frac{SP_u^2}{EA_u z_u} = \frac{SP_l^2}{EA_l z_l}$$

4.8 ファスナ継手の解析

航空機構造では、部品の結合にファスナ結合 (Fastener Joint) が多用される。ファスナの種類には、ボルト+ナット (Bolt/Nut)、リベット (Rivet)、ロックボルト+カラー (Lockbolt/Collar) 等がある (6.5.8.1 項参照)。航空機構造用ファスナについては NASA-RP-1228 (文献[2-23]) に解説されているので参照されたい。ファスナ 1 本だけで部品を結合することは少なく、多数のファスナで結合するのがふつうである。このような場合、個々のファスナに働く荷重を求める必要がある。

4.8.1 セン断荷重の伝達

せん断荷重を伝達するファスナ結合のファスナ荷重を計算するのは簡単で、せん断流にファスナ間隔を掛ければ得られる。ただし、部品間に働くせん断流を正しく把握することが大切である。

4.8.1.1 セン断ウェブとコードの結合

図 4-133 に示すせん断梁のウェブ (Web) とコード (Chord, 軸力部材) の結合ファスナの伝達荷重を計算する。ウェブは軸力を受け持たないとして、せん断場理論を適用すれば、ウェブ内のせん断流 $q = \frac{V}{h}$ は一定である。このせん断流がウェブとコード間に働くので、ファスナ間隔 (Fastener Pitch) を p とすると、ファスナ 1 本あたりの伝達荷重は $P_s = pq$ である。せん断荷重が働く長さを L 、ファスナ本数を n とし、 $P_s = \frac{qL}{n}$ と計算することもできる。

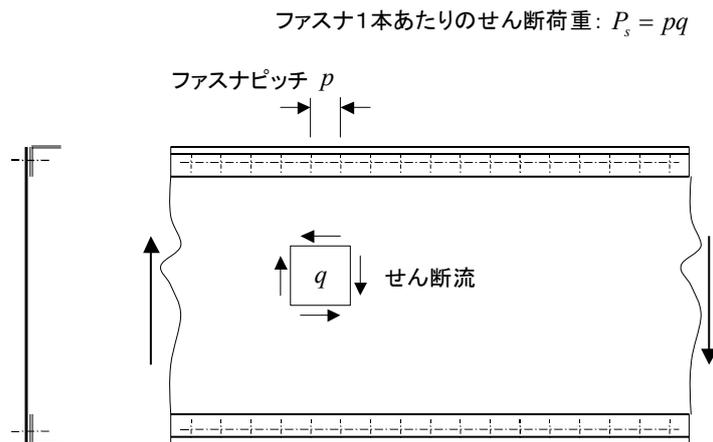


図 4-133 セン断梁のウェブとコードの結合

4.8.1.2 桁と外板の結合

翼構造が図 4-134 に示すように Build-up 構造の場合には、前項と同じようにウェブのせん断流 q_2 が桁ウェブとフランジ間のせん断流で、フランジと外板間のせん断流は q_1 である。

桁フランジとウェブが一体化されている場合 (図 4-135) には、桁フランジが軸力を受け持つので、ウェブのせん断流がそのまま桁フランジと外板間のファスナの伝達荷重になるわけではない。せん断場理論でせん断流を計算する場合、外板と桁フランジをひとつの軸力部材として取り扱うので、フランジの断面積分の補正をする必要がある。伝達するせん断流は、

$$q = q_2 - \frac{A_1}{A_1 + A_2} (q_2 - q_1)$$

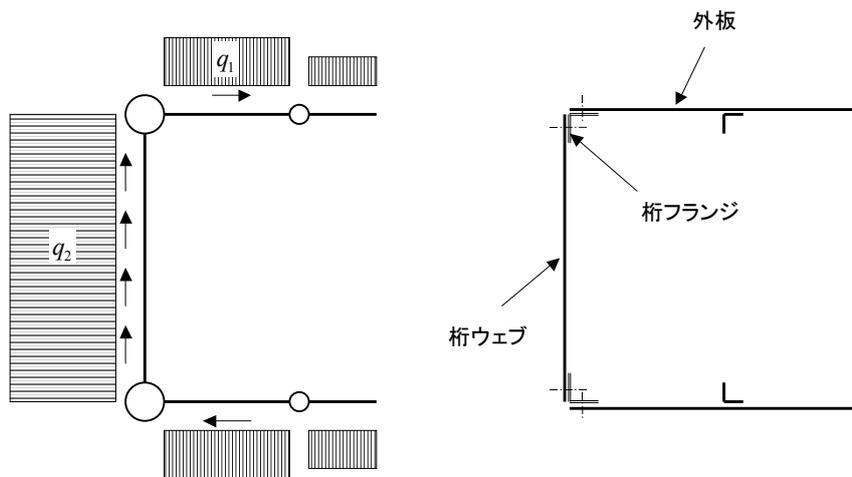


図 4-134 桁と外板の結合 - Build-up 構造の場合

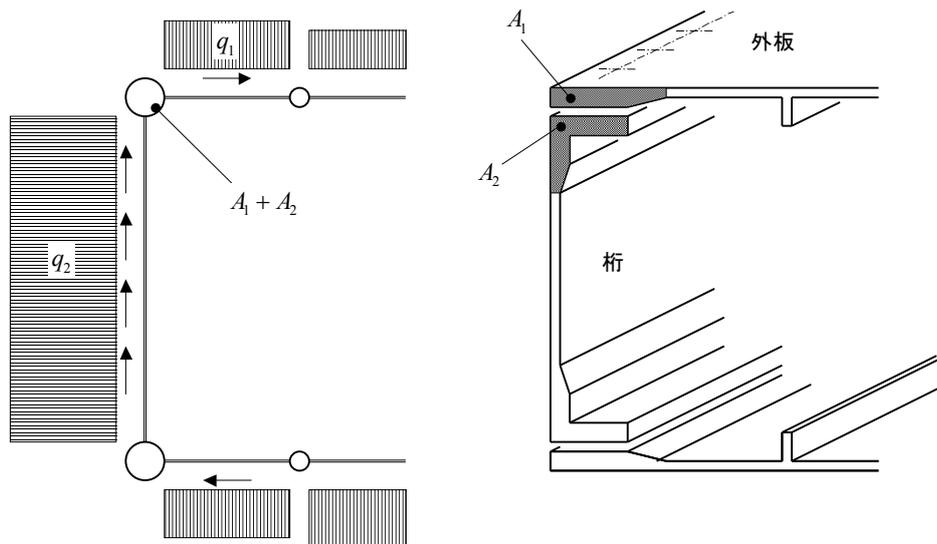


図 4-135 桁と外板の結合 - 一体桁構造の場合

4.8.1.3 ストリングと外板の結合

ストリングが外板にファスナで結合されている構造を考える (図 4-136)。ストリングの両側の外板のせん断流の差 ($q_2 - q_1$) がストリングに伝わって軸力となる。軸力の一部は外板が受け持つので、ストリングに入る荷重 (ファスナ結合荷重) はその分だけ少ない。外板からストリングに伝達されるせん断流は、

$$q = \left(1 - \frac{A_{skin,eff}}{A_{stringer} + A_{skin,eff}} \right) (q_2 - q_1)$$

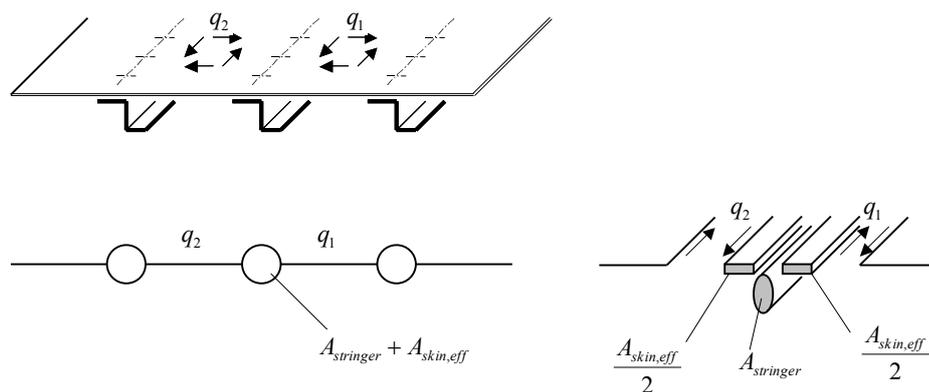


図 4-136 ストリンガと外板の結合

4.8.1.4 ウェブへの集中荷重の導入

せん断梁のウェブに荷重を入れるには、図 4-137 に示すように軸力部材からウェブにせん断荷重で流してやる。ファスナ荷重は、荷重をファスナ本数で割った値となる。

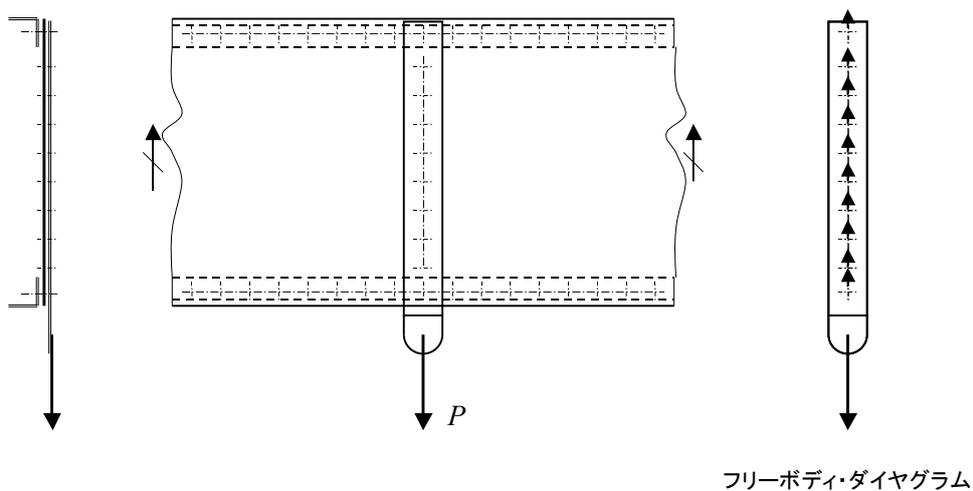


図 4-137 ウェブへの集中荷重の導入

4.8.2 軸力の伝達

軸力部材どうしを結合する場合に、軸力の方向のファスナ列数が多いと軸力部材とファスナが変形するために、ファスナ荷重が均一にならないので注意が必要である。本項では、多列ファスナ継手の線形解析について説明する。線形解析で得られるファスナの分担荷重は、静強度を評価する場合には安全側 (conservative) の値になる。破壊前から、ファスナ穴の面圧降伏やファスナのせん断降伏・曲げ降伏が起き荷重が再配分されるので、ファスナ分担荷重が均一化される。しかし、疲労荷重のレベルでは、降伏が起きないので、疲労強度計算には線形計算で求めた荷重分担を使わなければならない。

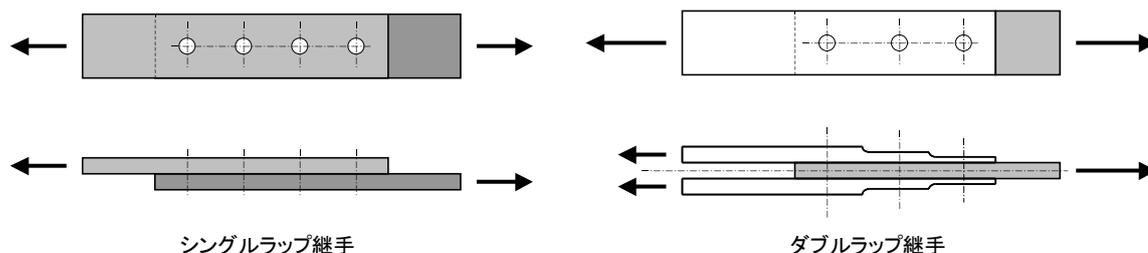


図 4-138 軸力を伝達する多列ファスナ継手

4.8.2.1 ファスナの等価ばね剛性

多列ファスナ継手 (図 4-138) のファスナの荷重分担を計算するにはファスナをばねとみなして、板の伸び剛性を考慮した解析を行う必要がある。ファスナの等価ばね剛性 K を図 4-139 のように定義する。ファスナの等価ばね剛性には板の面圧変形も含む。等価ばね剛性の逆数 C をファスナ・フレキシビリティ (Fastener Flexibility) と呼ぶ。

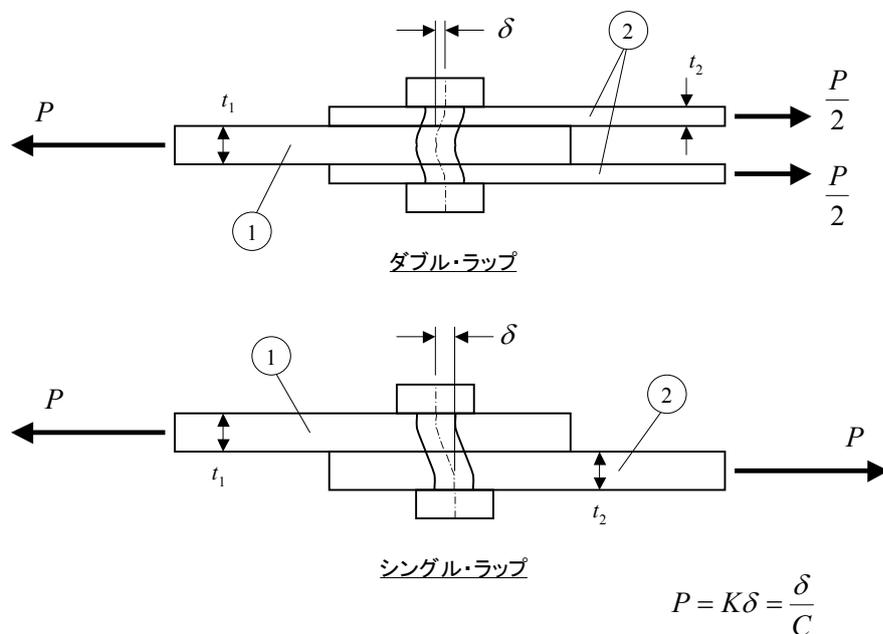


図 4-139 ファスナの等価ばね剛性の定義

ファスナの等価ばね剛性は次の式で表される (Huth, 文献[2-16]).

$$P = K\delta = \frac{1}{C}\delta$$

$$C = \frac{1}{K} = \left(\frac{t_1 + t_2}{2D}\right)^a \frac{b}{n} \left(\frac{1}{t_1 E_1} + \frac{1}{nt_2 E_2} + \frac{1}{2t_1 E_f} + \frac{1}{2nt_2 E_f}\right)$$

ここで,

t_1, t_2 : 板厚

E_1, E_2 : 板のヤング率

E_f : ファスナのヤング率

D : ファスナの直径

n : シングル・ラップの場合 1, ダブル・ラップの場合 2

a, b : 材料による定数

金属部品のボルト結合の場合: $a = \frac{2}{3}, b = 3.0$

金属部品のリベット結合の場合: $a = \frac{2}{5}, b = 2.2$

CFRP 部品のボルト結合の場合: $a = \frac{2}{3}, b = 4.2$

注: 文献[2-16]に載っている式には誤植がある。上の式が正しい。

4.8.2.2 多列ファスナ継手のファスナ荷重分担の解析法 – 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理

多列ファスナ継手のファスナ荷重分担を計算する方法は文献[2-15]等に記載しているが、この方法は連立方程式を解かなければならず手間がかかるので、エネルギーを使った解析法を紹介する。以下の解析では、継手の面外方向の変形は無視する。

多列ファスナ継手（ファスナ数 n 本）の力の釣り合いを考える（図 4-140）。

ファスナ $i+1$ 位置での板要素の釣り合い式は、

$$P_i^{\text{板1}} - P_{i+1}^f = P_{i+1}^{\text{板1}}$$

$$P_i^{\text{板2}} + P_{i+1}^f = P_{i+1}^{\text{板2}}$$

板の両端では、

$$P_0^{\text{板1}} = P, P_n^{\text{板1}} = 0$$

$$P_0^{\text{板2}} = 0, P_n^{\text{板2}} = P$$

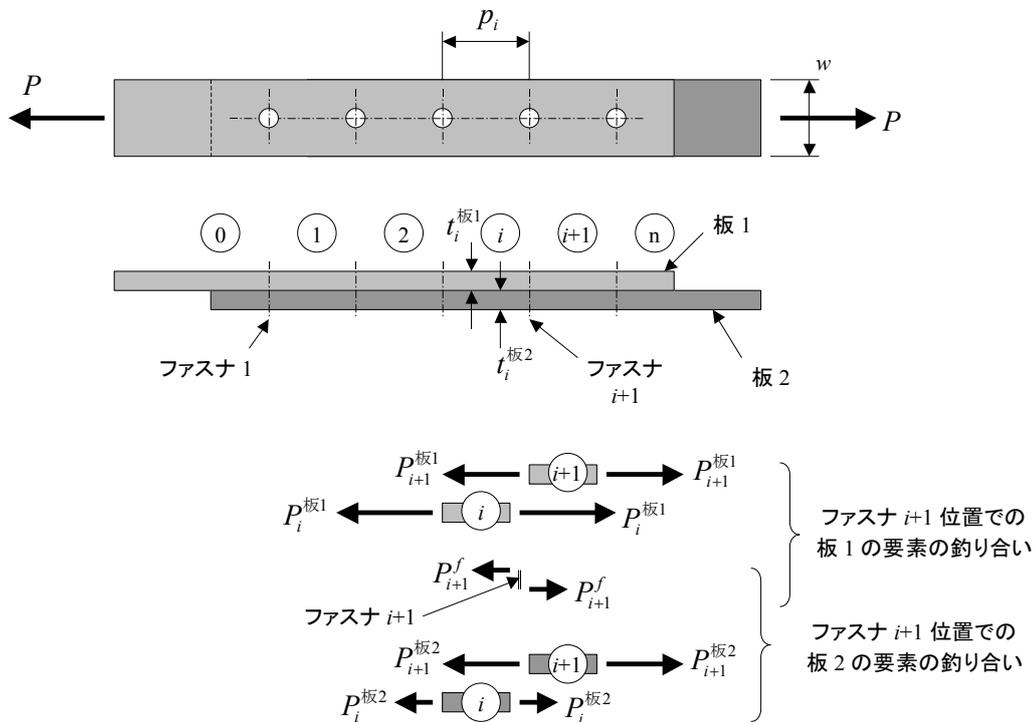


図 4-140 多列ファスナ継手の釣り合い

全コンプリメンタリ・エネルギー U_c を求めると、

$$U_c = \sum_{i=1}^{n-1} U_c^{\text{板1}} + \sum_{i=1}^{n-1} U_c^{\text{板2}} + \sum_{i=1}^n U_c^{\text{ファスナ}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(P_i^{\text{板1}})^2}{2E_1 w t_i^{\text{板1}}} p_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(P_i^{\text{板2}})^2}{2E_2 w t_i^{\text{板2}}} p_i + \sum_{i=1}^n \frac{(P_i^f)^2}{2K_i}$$

MS-Excel の「ソルバー」を使って全コンプリメンタリ・エネルギーを最小化することにより、ファスナ荷重が得られる。

解析例を図 4-141、表 4-24 に示す。

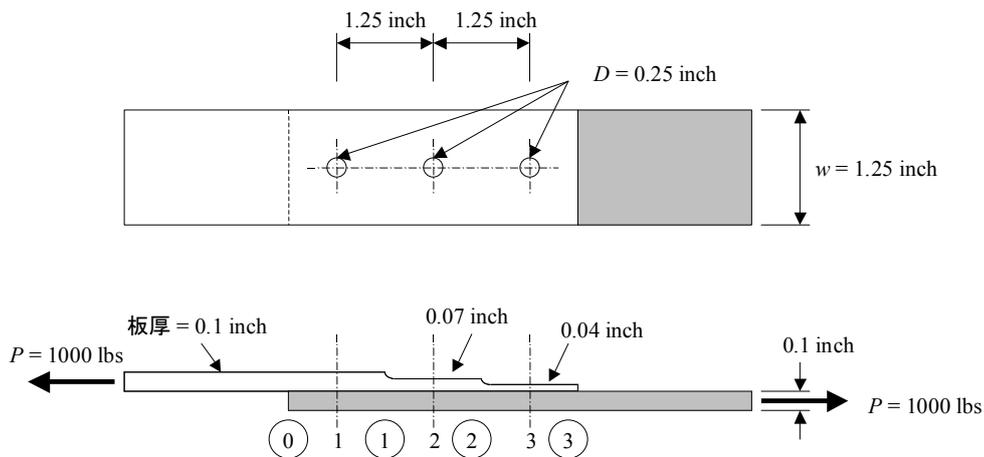


図 4-141 多列ファスナ継手の解析例

表 4-24 多列ファスナ継手の解析例 – 最小コンプリメンタリ・エネルギーの原理

	i	0	1	2	3	合計		
板1 (アルミ)	ヤング率 E1 (psi)	10300000	10300000	10300000	10300000	10300000	--	
	板厚 t1 (inch)	0.1	0.1	0.07	0.07	0.04	--	
	幅 w (inch)	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	制約条件	
	長さ p (inch)	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	--	
	軸力 P1 (lb)	1000.0	586.1	586.1	277.4	277.4	0.0	
	コンプリメンタリ・エネルギー (lb-inch)	--	0.08336406	0.11909151	0.02667739	0.04668543	--	0.2758184
板2 (アルミ)	ヤング率 E2 (psi)	10300000	10300000	10300000	10300000	10300000	--	
	板厚 t2 (inch)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	--	
	幅 w (inch)	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	--	
	長さ p (inch)	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	--	
	軸力 P2 (lb)	0	413.9	413.9	722.6	722.6	1000.0	--
	コンプリメンタリ・エネルギー (lb-inch)	--	0.04159001	0.04159001	0.12674395	0.12674395	--	0.3366679
ファスナ (ボルト)	ヤング率 Ef (psi)	--	29000000	--	29000000	--	29000000	--
	直径 D (inch)	--	0.25	--	0.25	--	0.25	--
	断面積 Af (inch ²)	--	0.04908739	--	0.04908739	--	0.04908739	--
	断面2次モーメント If ((inch ⁴)	--	0.00019175	--	0.00019175	--	0.00019175	--
	1/K (inch/lb)	--	3.724E-06	--	4.0577E-06	--	5.1379E-06	--
	等価ばね定数 K (lb/inch)	--	268526	--	246445	--	194633	--
	ファスナ荷重 Pf (lb)	--	413.9	--	308.7	--	277.4	--
コンプリメンタリ・エネルギー (lb-inch)	--	0.31905802	--	0.19331357	--	0.19764784	0.7100194	
コンプリメンタリ・エネルギー合計 (lb-inch)	--	--	--	--	--	--	1.3225057	

変化させるセル

↑
目的セル

4.8.2.3 多列ファスナ継手のファスナ荷重分担の解析法 – 最小ポテンシャル・エネルギーの原理

最小ポテンシャル・エネルギーの原理を使った解法を以下に示す。図 4-142 に示すように、板 1 の端の位置を原点として板 1 と板 2 の変形後の位置 x' を定義する。ファスナ位置での板の位置の差がファスナの変形量である。この変形から全ポテンシャル・エネルギーが次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{i=1}^{n-1} U^{\text{板1}} + \sum_{i=1}^{n-1} U^{\text{板2}} + \sum_{i=1}^n U^{\text{ファスナ}} \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{E_1 w t_i^{\text{板1}} \left[(x'_{i+1}^{\text{板1}} - x'_i{}^{\text{板1}}) - (x_{i+1}^{\text{板1}} - x_i^{\text{板1}}) \right]^2}{2p_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{E_2 w t_i^{\text{板2}} \left[(x'_{i+1}^{\text{板2}} - x'_i{}^{\text{板2}}) - (x_{i+1}^{\text{板2}} - x_i^{\text{板2}}) \right]^2}{2p_i} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{K_i (x'_i{}^{\text{板2}} - x'_i{}^{\text{板1}})^2}{2}
 \end{aligned}$$

MS-Excel の「ソルバー」を使って全ポテンシャル・エネルギーを最小化すると、変位の解が得られ、ファスナ荷重を次の式で計算することができる。

$$P_i^f = K_i (x'_i{}^{\text{板2}} - x'_i{}^{\text{板1}})$$

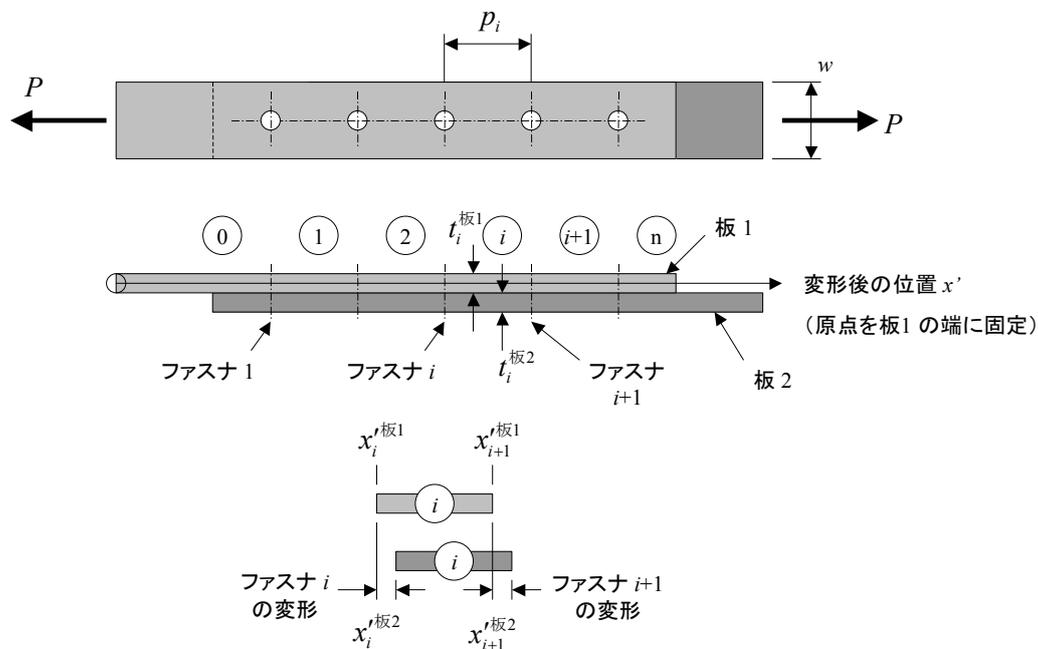


図 4-142 多列ファスナ継手の変形

前項の問題（図 4-141）を最小ポテンシャル・エネルギーの原理を使って解いた結果を表 4-25 に示す。板厚がファスナ間で変化しているため、ファスナ間で板要素を 2 つに分割して計算した。ファスナ荷重は前項の結果と一致している。

表 4-25 多列ファスナ継手の解析例 - 最小ポテンシャル・エネルギーの原理

← 変化させるセル

	1	1a	2	2a	3	合計
ファスナNo. i						
ファスナ位置 x (inch)	0	1.25	1.875	2.5	3.125	3.75
変形後のファスナ位置 x' (inch)	0	1.25077	1.876176	2.501369	3.126705	
板要素 (i)	(0)	(1)	(1a)	(2a)	(2a)	
ヤング率 E1 (psi)	10300000	10300000	10300000	10300000	10300000	--
板厚 t1 (inch)	0.1	0.1	0.07	0.04	0.04	--
幅 w (inch)	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	--
長さ p (inch)	0.625	0.625	0.625	0.625	0.625	--
伸び $(x'+1-x_i)-(x_i+1-x_i)$ (inch)	0.000485	0.000284	0.000406	0.000192	0.000337	
ポテンシャル・エネルギー (lb-inch)	0.242717	0.083363	0.11909	0.026677	0.046685	0.518533
変形後のファスナ位置 x' (inch)	0.627027	1.252228	1.877429	2.50278	3.12813	3.753616
板要素 (i)		(1)	(1a)	(2a)	(2a)	
ヤング率 E2 (psi)	10300000	10300000	10300000	10300000	10300000	--
板厚 t2 (inch)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	--
幅 w (inch)	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	--
長さ p (inch)		0.625	0.625	0.625	0.625	--
伸び $(x'+1-x_i)-(x_i+1-x_i)$ (inch)		0.000201	0.000201	0.000351	0.000485	
ポテンシャル・エネルギー (lb-inch)		0.04159	0.041589	0.126743	0.242718	0.579384
ヤング率 Ef (psi)	29000000		29000000		29000000	--
直径 D (inch)	0.25		0.25		0.25	--
断面積 Af (inch ²)	0.049087		0.049087		0.049087	--
断面2次モーメント If ((inch ⁴)	0.000192		0.000192		0.000192	--
1/K (inch/lb)	3.72E-06		4.06E-06		5.14E-06	--
等価ばね定数 K (lb/inch)	268526		246445		194633	--
変位 (inch)	0.001542		0.001253		0.001425	0.710026
ポテンシャル・エネルギー (lb-inch)	0.31906		0.193316		0.19765	
ファスナ荷重 (lb)	413.9		308.7		277.4	
外荷重 P (lb)	--	--	--	--	--	1000
ポテンシャル・エネルギー合計 (lb-inch)	--	--	--	--	--	-3751.808

↑
目的セル

4.8.2.4 多列ファスナ継手のファスナ荷重分担のチャート

ファスナ剛性と軸力部材の剛性が多列ファスナ継手のファスナ荷重分担にどのような影響をおよぼすのかを把握できるように、ファスナ荷重分担のチャートを示す。剛性のパラメータとして板の剛性 $K_{plate} = \frac{wtE}{p}$ を使う。

ここで、 w は軸力部材の板幅、 t は軸力部材の板厚、 p はファスナピッチ、 E は軸力部材のヤング率である。 D をファスナ直径とする。板厚が等しいアルミ合金のシングルラップ継手のファスナ等価ばね剛性は図 4-143 のようになる。 K / K_{plate} はだいたい 0.1~0.3 の間にある。

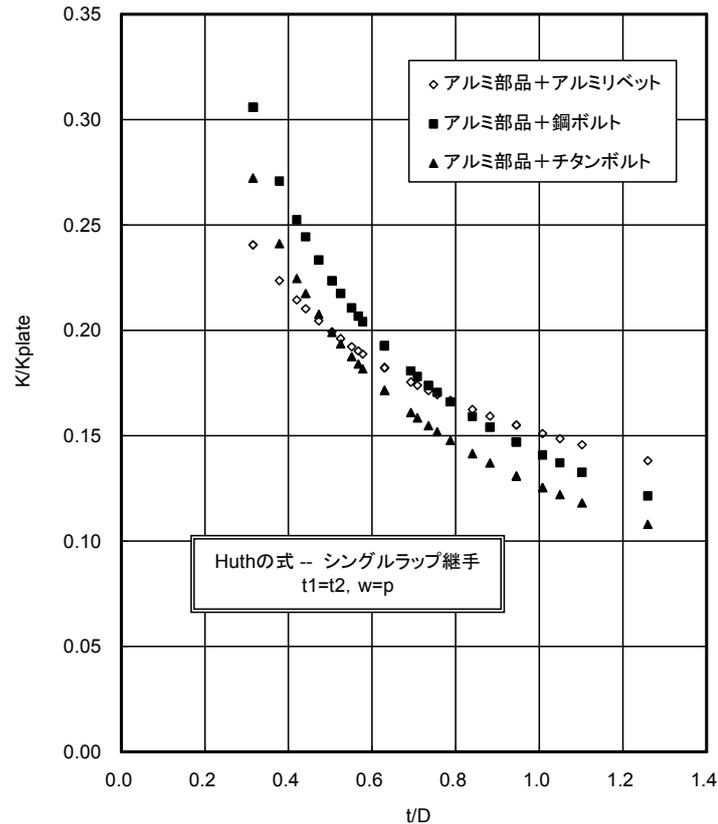
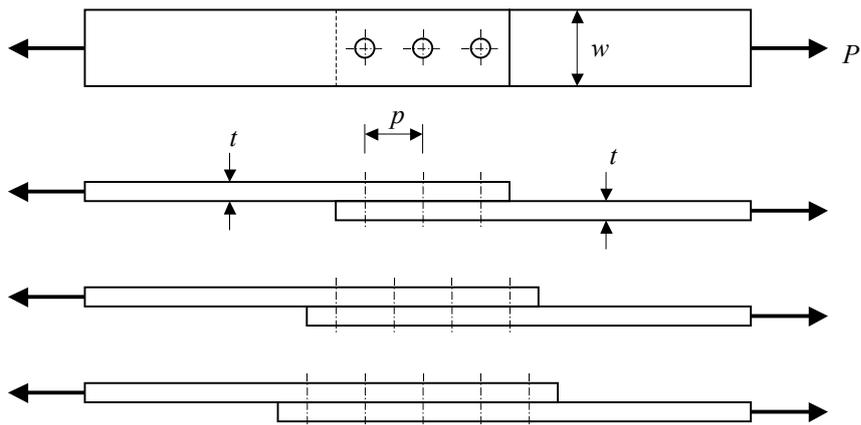


図 4-143 ファスナの等価ばね剛性

板厚が等しいアルミ合金のシングルラップ継手（ファスナ3列～5列）のファスナ分担荷重を図 4-144 に示す。この図から以下のことがわかる。

- 両端のファスナの荷重がもっとも大きく、内側にいくにしたがってファスナ荷重が小さくなる。
- ファスナの等価ばね剛性が大きいほどファスナ荷重の差が大きい。
- ファスナ本数が多いほどファスナ荷重の差が大きい。

ファスナ荷重をなるべく均一にするには、部材の板厚分布やファスナ径を適切に設計する必要がある。たとえば端にいくにしたがって板厚を小さくすることにより、ファスナ荷重の均一化をはかることができる。



板の剛性: $K_{plate} = \frac{wtE}{p}$ ファスナの等価ばね剛性: K

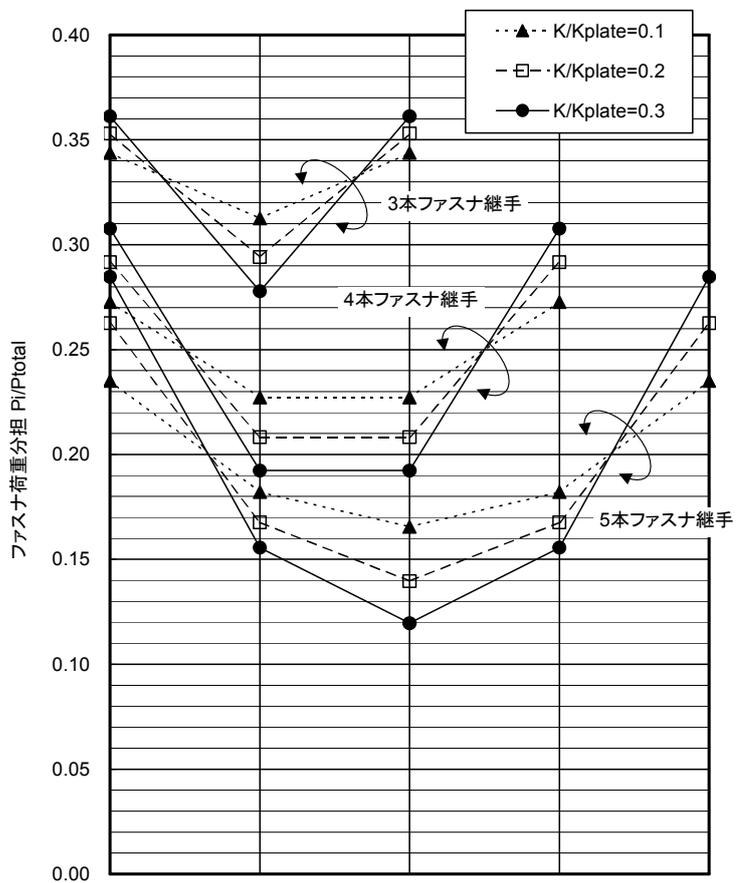


図 4-144 アルミ合金のシングルラップ継手のファスナ荷重分担

4.8.3 ファスナグループ

部品どうしの結合を複数のファスナで結合する場合、部品の剛性がファスナの剛性に比べて大きいとみなせるときには、「ファスナグループ解析」を用いてファスナ荷重分担を計算できる。ファスナグループ解析では、部品の変形はないと仮定し、ファスナの剛性だけを考慮する。前項で説明した軸力を伝達するファスナ継手では、軸力により結合される部品が変形するので、ファスナグループ解析を適用してはならない。

図 4-145 に示すファスナグループのファスナ荷重分担を求める式を以下に示す。

ファスナ i の断面積を A_i とする。ファスナのせん断応力はすべてのファスナで等しいと仮定する。このとき、ファスナグループの重みつき重心位置 (x_{cg}, y_{cg}) は、

$$x_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_{cg} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

外力をファスナ重心位置に変換すると、

$$P_{cg,x} = P_x, \quad P_{cg,y} = P_y$$

$$M_{cg} = -P_x (y_p - y_{cg}) + P_y (x_p - x_{cg})$$

$P_{cg,x}$ と $P_{cg,y}$ によるファスナ荷重はファスナ断面積に比例するので、

$$P_{cxi} = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^n A_j} P_{cg,x}, \quad P_{cyi} = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^n A_j} P_{cg,y}$$

M_{cg} によるファスナ荷重は、ファスナ位置とファスナ重心位置の距離に比例するので、

$$P_{exi} = \frac{-(y_i - y_{cg}) A_i}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_{cg})^2 A_j + \sum_{j=1}^n (y_j - y_{cg})^2 A_j} M_{cg}, \quad P_{eyi} = \frac{(x_i - x_{cg}) A_i}{\sum_{j=1}^n (x_j - x_{cg})^2 A_j + \sum_{j=1}^n (y_j - y_{cg})^2 A_j} M_{cg}$$

ファスナ荷重の合計は、

$$P_{xi} = P_{cxi} + P_{exi}, \quad P_{yi} = P_{cyi} + P_{eyi}$$

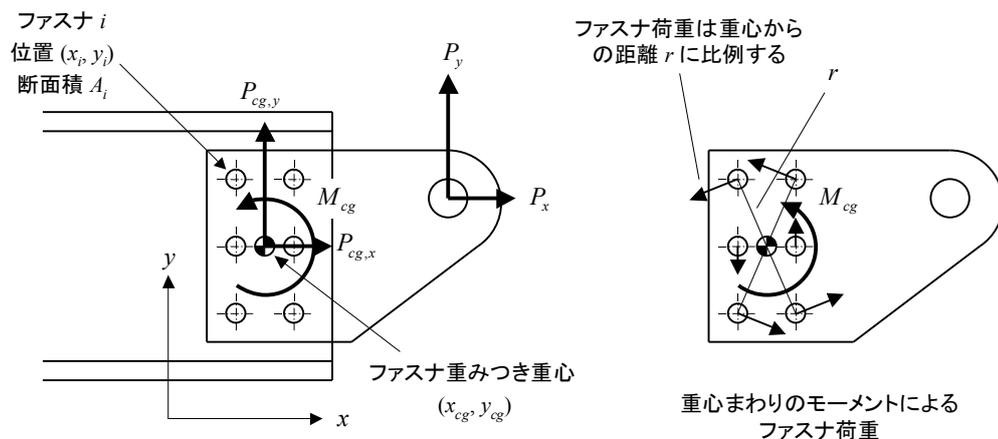


図 4-145 ファスナグループ解析

ファスナグループ解析の例題を図 4-146 に示す。この問題を解いた結果を表 4-26 と図 4-147 に示す。

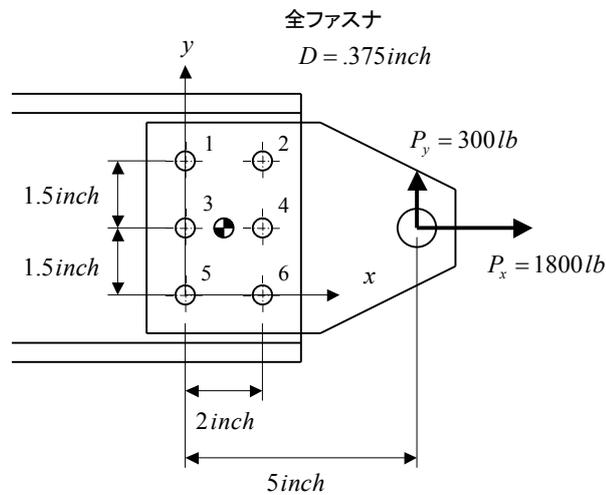


図 4-146 ファスナグループ解析の例題

表 4-26 ファスナグループ解析結果

$P_x = 1800$ lb
 $P_y = 300$ lb
 $x_p = 5$ inch
 $y_p = 1.5$ inch
 $x_{cg} = 1$ inch
 $y_{cg} = 1.5$ inch
 $M_{cg} = 1200$ inch-lb

ファスナ 番号	x (inch)	y (inch)	D (inch)	A (inch ²)	A*x (inch ³)	A*y (inch ³)	x-xcg (inc)	y-ycg (inch)
1	0	3	0.375	0.442	0.000	1.325	-1.000	1.500
2	2	3	0.375	0.442	0.884	1.325	1.000	1.500
3	0	1.5	0.375	0.442	0.000	0.663	-1.000	0.000
4	2	1.5	0.375	0.442	0.884	0.663	1.000	0.000
5	0	0	0.375	0.442	0.000	0.000	-1.000	-1.500
6	2	0	0.375	0.442	0.884	0.000	1.000	-1.500
合計				2.651	2.651	3.976		

ファスナ 番号	(x-xcg) ² *A (inch ³)	(y-ycg) ² *A (inch ³)	Pcx (lb)	Pcy (lb)	Pex (lb)	Pey (lb)	Px (lb)	Py (lb)	P (lb)
1	0.442	0.994	300	50	-120	-80	180	-30	182.5
2	0.442	0.994	300	50	-120	80	180	130	222.0
3	0.442	0.000	300	50	0	-80	300	-30	301.5
4	0.442	0.000	300	50	0	80	300	130	327.0
5	0.442	0.994	300	50	120	-80	420	-30	421.1
6	0.442	0.994	300	50	120	80	420	130	439.7
合計	2.651	3.976	1800	300	0	0	1800	300	

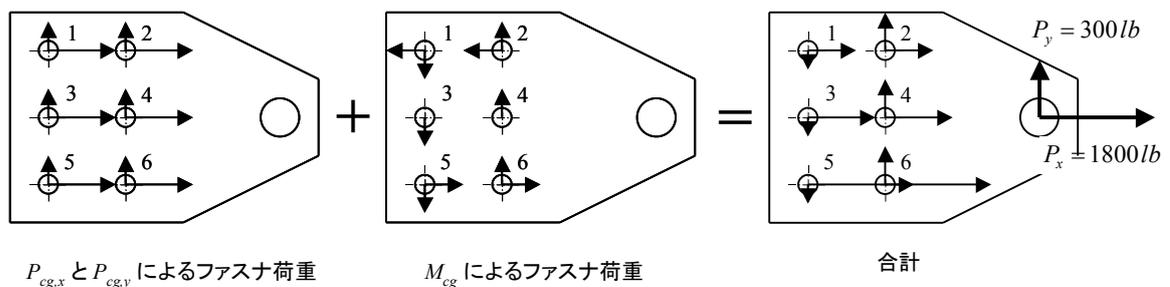


図 4-147 ファスナグループ解析結果

4.9 内部荷重の非線形性の考慮

内部荷重に非線形性の影響が出る場合がある。構造の非線形挙動には、①材料非線形と②幾何学的非線形の2種類がある。構造が破壊するまでにこの両方の非線形性が表れるが、内部荷重を算出する際にどの非線形性を考慮すべきか、強度判定のときにどの非線形を考慮すればよいのかを知っておく必要がある。表 4-27 に非線形挙動を分類して対応の方法を示した。

表 4-27 非線形挙動の分類と考慮の方法

構造要素	荷重の種類	現象	材料非線形	幾何学的非線形	現象の説明	内部荷重算出における考慮方法	強度判定における考慮方法
板	せん断	不完全張力場	○	○	ウェブのせん断座屈後に張力場で荷重を保持する。せん断剛性が低下する。	全機レベルの内部荷重計算では考慮不要。ウェブ剛性の補正も行わない。	補強材の荷重補正を行う。
	圧縮	有効幅	—	○	板の圧縮座屈後に板の軸剛性が低下し、分担荷重が減る。	全機レベルの内部荷重計算で考慮する必要がある。有効幅分の断面積を内部荷重計算に使用する。	有効幅を使って補強材と合わせて強度を判定する。
	圧力	ダイヤフラム効果	—	○	圧力による面外たわみが大さくになると、面内力の傾きで面外荷重を保持するようになり、曲げ応力の増加が抑制される。	全機レベルの内部荷重計算では考慮不要。コンポーネントレベルの内部荷重計算で考慮する。	ダイヤフラム効果を考慮した応力で強度を判定する。
軸力部材	圧縮	クリップリング ジョイント・オライナー座屈	○	○	軸力部材が座屈し、荷重を受け持たなくなる。	この現象は破壊なので、全機レベルの内部荷重計算では考慮不要。	強度判定に使用する。
	圧縮+横荷重	ビームカラム	—	○	軸力部材の応力が座屈前に急増する。	この現象は破壊なので、全機レベルの内部荷重計算では考慮不要。	強度判定に使用する。
梁	横荷重	横倒れ座屈	—	○	梁のフリーフランジが座屈し、荷重を受け持たなくなる。	この現象は破壊なので、全機レベルの内部荷重計算では考慮不要。	強度判定に使用する。
柱	軸力+横荷重	ビームカラム	—	○	部材の変形と応力が座屈前に急増する。	脚組の場合、変形で内部荷重が影響を受けることがあるので、内部荷重計算で考慮する必要がある。	影響を考慮して算出した内部荷重を使って強度判定を行う。
ファスナ継手	せん断	面圧降伏 ファスナせん断降伏	○	—	降伏により、ファスナ荷重分担の均一化が起きる。	全機レベルの内部荷重計算では考慮不要。ファスナ荷重分担の計算で考慮する。	降伏を考慮して算出したファスナ荷重を使用する。

5 有限要素法の使い方

内部荷重解析の非常に強力な手法が有限要素法（Finite Element Method, FEM と略す）である。現在では、どのような複雑な構造も有限要素解析（Finite Element Analysis, FEA と略す）で解けると言っても過言ではない。しかも、最近ではパーソナル・コンピュータ（PC）で大きな規模の有限要素解析ができるようになり、手軽に使えるようになっている。このため、構造解析に有限要素法が広く用いられている。

全機レベルでは、内部荷重グループが全機 FEM モデルで内部荷重を計算し、強度計算担当者はその内部荷重を使って強度計算をする。また、コンポーネント・レベルでは、強度計算担当者自身が有限要素解析をおこなって内部荷重を出すことが多い。したがって、構造解析技術者は有限要素解析の知識がないと仕事にならない。

構造解析技術者に必要な有限要素法の知識は以下のとおりである。

- (1) 内部荷重グループから提供される有限要素解析による内部荷重を使うには以下の知識が必要である。
 - 出力データの書式
 - モデルの要素力、節点力を実際の構造要素の内部荷重とどう対応させるか。
- (2) 有限要素解析を実施するには以下の知識が必要である。
 - 要素の種類とその特徴
 - 構造をどうモデル化するか、すなわち、どの要素種を使い、どの程度の要素分割をするか。どう拘束するか、どうやって荷重を負荷するか。
 - 有限要素法ソフトの使い方
 - ◇ 入力データの書式
 - ◇ 出力データの書式
 - ◇ ソフトの実行方法
 - 解析結果の解釈のしかた

本項では、上記②の観点で有限要素解析の基礎を説明する。有限要素法のソフトウェアとしては航空機構造解析の分野でもっともよく用いられている NASTRAN を想定する。有限要素法ソフトウェアの使い方に関しては本書では説明しないので、そのソフトウェアのマニュアルを参照してほしい。

5.1 有限要素法とは

有限要素法は、複雑な構造を多くの小さな棒要素、板要素、梁要素等に分割してモデル化してその変形と応力分布を計算する方法である。個々の要素内では単純な応力分布と変位分布を仮定しているため、要素分割が粗い場合には得られる解の精度はよくないが、分割を多くすればするほど精度の良い解が得られる。解析にはひじょうに多くの変数を使うため、コンピュータが必要である。汎用の有限要素解析ソフトウェアがあるので、構造解析技術者はそれを使う。構造解析技術者の仕事は、自分の解析対象のモデル化を行って、入力データを作成すること、計算結果を解釈して強度計算に使うことである。全機 FEM モデルの例を図 5-1 と図 5-2 に示す。

要素（Element）は複数の節点（Grid Points）からできており、他の要素と節点を共有している。各要素で節点の変位（Grid Point Displacement）と節点の荷重（Grid Point Force）の関係は次のようにマトリックスで表示できる。ある節点の節点変位は、3方向の並進の変位と3つの軸まわりの回転、合計6個の変数で構成されている。同じように節点荷重は、3方向の力と3つの軸まわりのモーメントで構成されている。

$$\{\mathbf{f}\}^e = [\mathbf{K}]^e \{\mathbf{u}\}^e$$

ここで、 $\{\mathbf{f}\}^e$: 節点荷重ベクトル

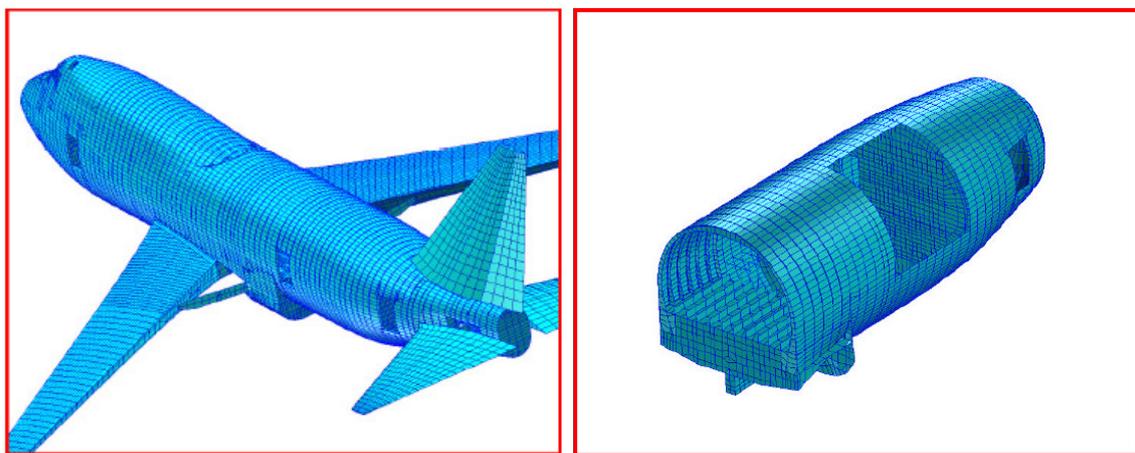
$\{\mathbf{u}\}^e$: 節点変位ベクトル

$[\mathbf{K}]^e$: 要素剛性マトリックス

この式はバネの式と相似であるので、理解しやすいだろう。 $[\mathbf{K}]^e$ がバネ定数に相当する要素剛性マトリックス (Element Stiffness Matrix) であり、要素の種類 (Element Type)、寸法 (Element Properties)、材料定数 (Material Properties) を与えてやれば有限要素法ソフトウェアが計算してくれる。構造モデルのすべての要素の節点変位と節点荷重の関係を足し合わせることによって、構造モデル全体の節点変位と節点荷重の関係のマトリックス表示ができる。

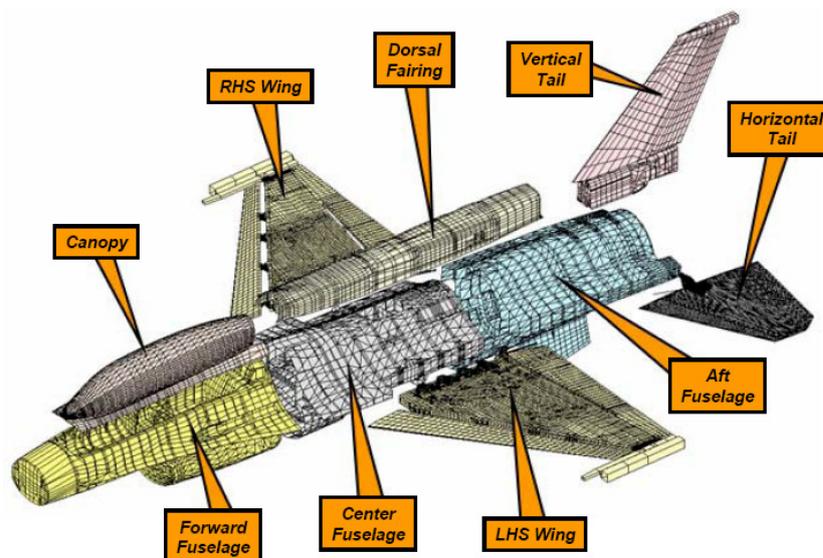
$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\}$$

この式のいくつかの節点は拘束されており、いくつかの節点には外荷重が負荷されているので、それらの条件を与えてやれば、マトリックス表示の式が1次の多元連立方程式となって解くことができる。拘束された節点については反力が得られ、その他の節点については変位が得られる。変位から要素の歪が計算され、応力が計算される。



(文献[2-9]より)

図 5-1 Boeing 747SP の全機 FEM モデル



(文献[2-10]より)

図 5-2 F-16 Block 52+ の全機 FEM モデル

5.2 NASTRAN の主な要素

5.2.1 座標系

NASTRAN では全体座標系 (Global Coordinates) と呼ばれる基準直交座標系がある。この座標系が他の座標系の基準となる。全体座標系に対してユーザーが任意の座標系を定義することができる。ユーザーが定義する座標系は直交座標系に限らず、円筒座標系、球座標系が使える。ユーザーが定義する座標系は、斜め拘束、変位方向、部材の方向を定義するのに便利に使える。

NASTRAN で用いられるその他の座標系には、要素座標系がある。要素座標系 (Element Coordinates) は要素を定義すると自動的に決まり、要素力 (Element Force)、要素応力 (Element Stress) の出力に使われる。

5.2.2 自由度

全体座標系の 1 軸, 2 軸, 3 軸方向の並進自由度をそれぞれ 1, 2, 3 とする。1 軸まわり, 2 軸まわり, 3 軸まわりの回転自由度をそれぞれ 4, 5, 6 とする。ユーザーが定義した座標系についても、それぞれの座標系で並進自由度を 1, 2, 3 とし、回転自由度を 4, 5, 6 とする。

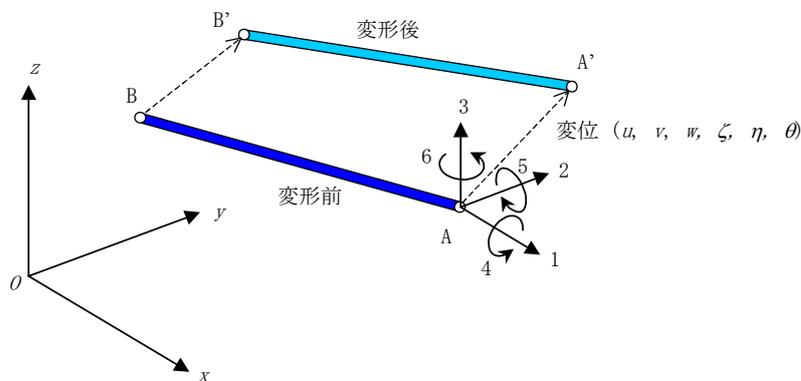


図 5-3 有限要素法における自由度

5.2.3 要素の種類

よく使う要素について以下に説明する (文献[2-18])。

5.2.3.1 棒要素 (ROD)

要素内で軸力 P (Axial Force) とねじりモーメント T (Torque) が一定の要素である。

必要な形状データ (Geometry) は両端の節点座標であり, "CROD" データで記述される。必要な要素特性データ (Properties) は、断面積と材料種であり, "PROD" データで記述される。材料特性データは "MAT" データで記述される。

要素座標系と要素荷重の定義を図 5-4 に示す。要素座標は、節点 a を始点とし、節点 b の方向にとられる。棒要素の要素座標系で使う自由度は並進の自由度とねじれ角 (1, 4) である。

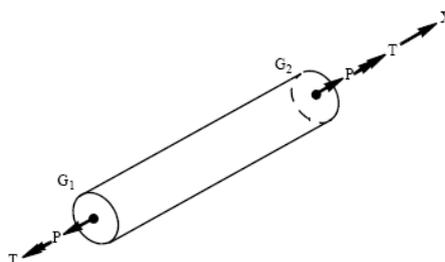


図 5-4 棒要素 (ROD)

5.2.3.2 梁要素 (BAR, BEAM)

梁要素は、軸力 F_x 、せん断 V_1, V_2 、曲げモーメント $M_{1a}, M_{2a}, M_{1b}, M_{2b}$ 、ねじりモーメント T を受け持つ 1 次元要素で、BAR と BEAM の 2 種類ある。両者の違いは、断面特性が要素内で一定の要素が BAR で、断面特性が要素内で変化するものが BEAM である。節点からの断面の中立軸 (Neutral Axis) のオフセットが許される。必要な形状データは、両端の節点座標 a, b と断面の基準面の向き Plane 1, Plane 2 であり、"CBAR" または "CBEAM" データで記述される。必要な要素特性データは、断面特性と材料種であり、"PBAR" または "PBEAM" で記述される。材料特性データは "MAT" データで記述される。

要素座標系と要素荷重の定義を図 5-5 と図 5-6 に示す。要素座標の x 軸は節点 a を始点とし、節点 b の方向にとられる。 y 軸と z 軸は Plane 1 と Plane 2 で定義する。梁要素の要素座標系で使う自由度は全自由度 (1, 2, 3, 4, 5, 6) である。

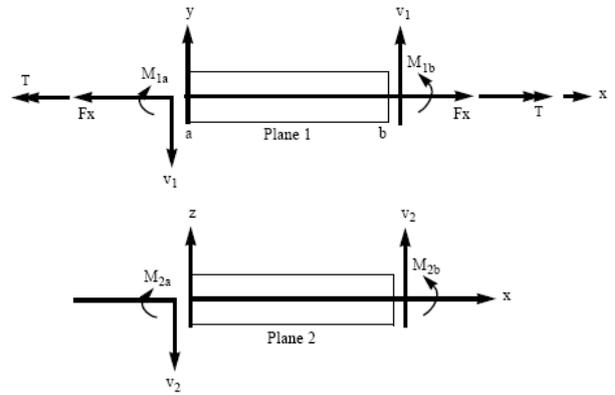
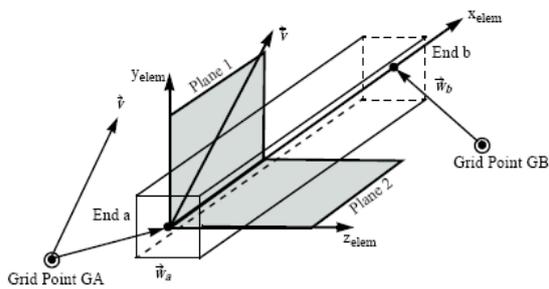


図 5-5 梁要素 (BAR)

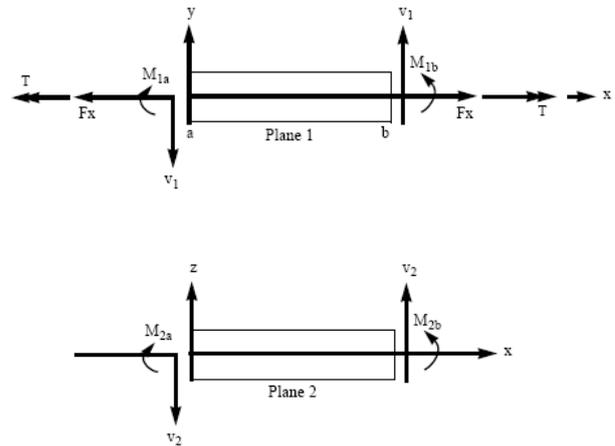
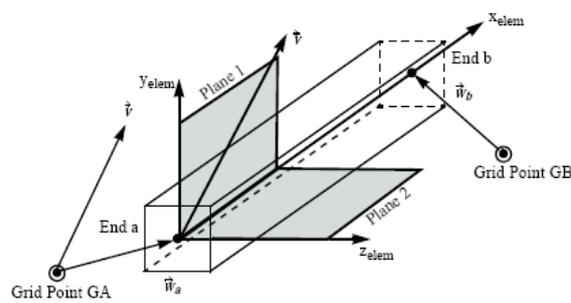


図 5-6 梁要素 (BEAM)

5.2.3.3 せん断パネル要素 (SHEAR)

せん断パネル要素はせん断場理論で出てきたせん断パネルと同じで、面内のせん断力だけを受け持つ四辺形要素で、要素内のせん断応力が一定である。伸び縮みの剛性と曲げ剛性はないので、せん断パネル要素だけのモデルは不安定である。棒要素等の他の要素と組み合わせて使う。長方形の場合はよいが、ゆがんだ四辺形の場合には、誤差が大きくなる。

必要な形状データは4隅の節点座標であり、"CSHEAR"データで記述される。必要な要素特性データは、板厚と材料種であり、"PSHEAR"データで記述される。材料特性データは"MAT"データで記述される。

要素座標系と要素荷重の定義を図 5-7 に示す。要素座標の x 軸は、節点 1 を始点とし、節点 2 の方向にとられる。せん断パネル要素の要素座標系で使う自由度は面内の並進の自由度 (1, 2) である。

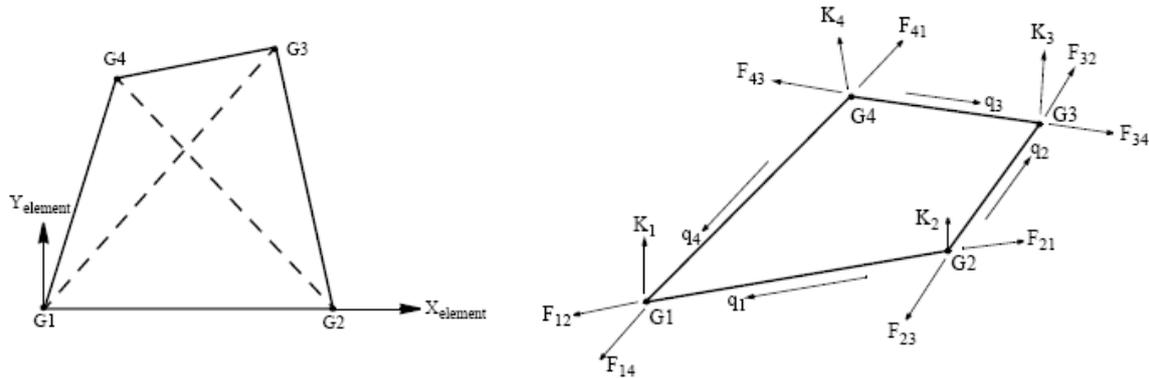


図 5-7 せん断パネル要素 (SHEAR)

5.2.3.4 三角形板要素 (TRIA3, TRIAR)

面内力と面外曲げを受け持つ3節点の三角形板要素である。曲げ剛性を入れなければ、膜要素 (Membrane Element) として使える。要素内で応力は一定であるので、応力の変化が大きい場所では細かい分割にする必要がある。細長い形状にすると誤差が大きくなる。QUADR 要素は QUAD4 要素を改良したもので、QUADR のほうが精度がよいのでこちらを使うのがよい。

必要な形状データは3隅の節点座標であり、"CTRIA3"または"CTRIAR"データで記述される。必要な要素特性データは、板厚と材料種であり、"PTRIA3"または"PTRIAR"データで記述される。材料特性データは"MAT"データで記述される。

要素座標系と要素荷重の定義を図 5-8 に示す。要素座標の x 軸は、節点 1 を始点とし、節点 2 の方向にとられる。材料特性の座標系は"QCQUAD4"データ中に角度 θ で与える。三角形板要素の要素座標系で使う自由度は面内の並進の自由度と回転の自由度 (1, 2, 3, 4, 5) である。

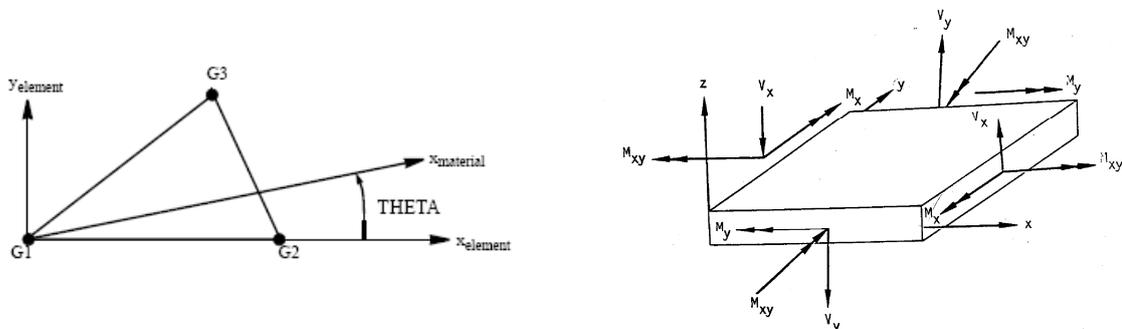


図 5-8 三角形板要素 (TRIA3, TRIAR)

5.2.3.5 四辺形板要素 (QUAD4, QUADR)

面内力と面外曲げを受け持つ4節点の四辺形板要素である。曲げ剛性を入れなければ、膜要素 (Membrane Element) として使える。細長い形状にすると誤差が大きくなる。QUADR 要素は QUAD4 要素を改良したもので、QUADR のほうが精度がよいのでこちらを使うのがよい。

必要な形状データは4隅の節点座標であり、"CQUAD4"または"CQUADR"データで記述される。必要な要素特性データは、板厚と材料種であり、"PQUAD4"または"PQUADR"データで記述される。材料特性データは"MAT"データで記述される。

要素座標系と要素荷重の定義を図 5-9 に示す。要素座標の x 軸は図 5-9 に示すように節点座標から自動的に定義される。材料特性の座標系は"CQUAD4"または"CQUADR"データ中に角度 θ で与える。四辺形要素の要素座標系で使う自由度は面内の並進の自由度と回転の自由度 (1, 2, 3, 4, 5) である。

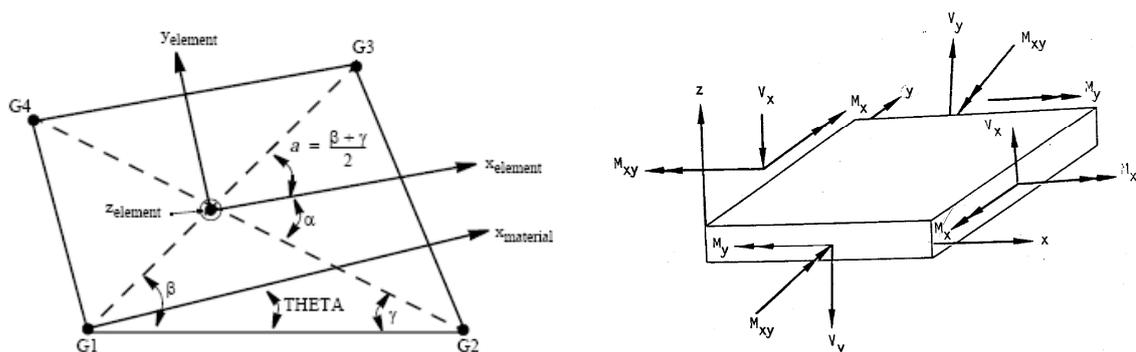


図 5-9 四辺形板要素 (QUAD4, QUADR)

5.3 モデルの作成

FEM 解析におけるモデル化の一般的な手順を説明する。

5.3.1 モデル化の手順

モデル化の手順を図 5-10 に示す。この中で一番重要なのは、「構造の把握」である。図面をよく見て構造全体を理解したうえで、構造要素に分解しその機能を把握する。この理解をもとにすることにより適切なモデル化が可能になる。

5.3.1.1 拘束条件

モデルの拘束条件は"SPC"データ (Single Point Constraint) と"MPC"データ (Multi-Point Constraint) で記述する。"SPC"は節点の自由度を単に拘束する場合に使い、"MPC"はある自由度が他の自由度に従属して変わる場合に用いる。

5.3.1.2 荷重の負荷

荷重の負荷は"LOAD"データで記述する。節点に集中荷重で与えることもできるし、圧力のように分布荷重で与えることもできる。

5.3.1.3 強制変位の負荷

節点に強制変位を負荷するには、"SPCD"データで記述する。

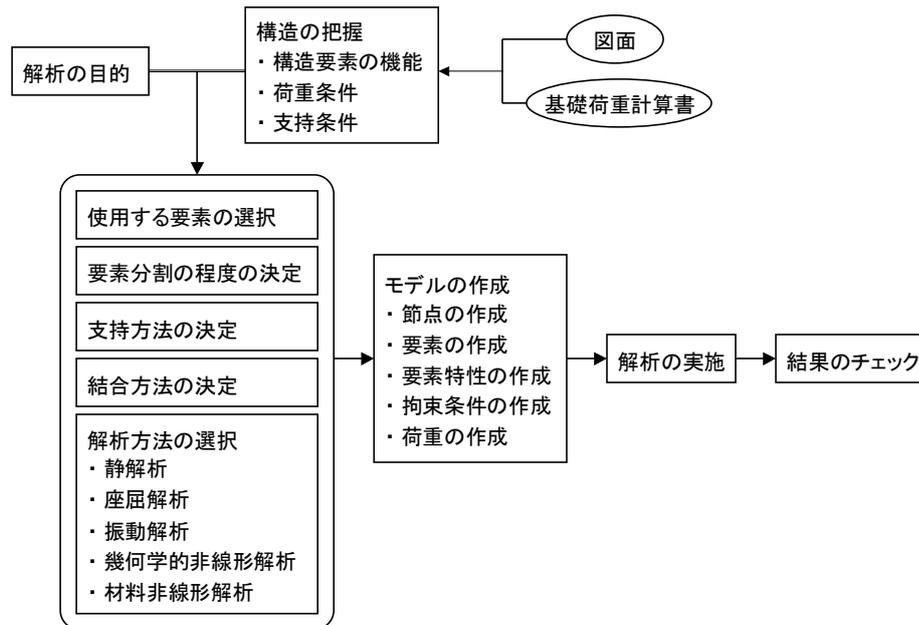


図 5-10 FEM 解析におけるモデル化の手順

5.4 有限要素解析の注意事項

有限要素法は非常に強力な解析ツールであるが、その反面、適切なモデル化、使い方をしないと間違った答えが出てくる危険性がある。有限要素法が普及した頃の有限要素法のユーザーは構造解析のベテランたちであったので、有限要素法プログラムの中身まで理解して使っていた。しかし現在では、有限要素モデルを作成するのはむしろ構造解析の経験が少ない人になってきており、有限要素法はブラックボックス化してしまった。解析目的に合った適切なモデル化ができていかどうかを確認する必要がある。

- 有限要素解析における誤差
有限要素解析における誤差は、要素の種類と要素分割の細かさによる。要素分割をどれくらい細かくしたらよいかは解析目的によって変わる。たとえば、座屈解析では、座屈波形を表現できるだけの細かい要素分割をしないと実際より高い座屈荷重が出てきてしまう。要素分割数を変化させて収束の確認をする、解析解との比較等の解析の確認が必要である。
- 非線形解析
非線形静解析には幾何学的非線形解析と材料非線形解析があるが、非線形有限要素解析を安易に使わないようにしたい。試験データや解析解で有限要素解析結果が正しいことを実証しないかぎり非線形解析の結果は信用できない。
- 試験結果との比較
航空機の開発では、開発試験や実大試験が実施されるので、これらの試験データを使って有限要素解析の妥当性を確認することができる。有限要素解析担当者は、解析モデルを試験データと比較することにより実現象のモデル化についての深い理解を得ることができる。
- 警句
わが意を得たりという言葉を見つけたので、ここに掲げておく。
“Finite Element Analysis makes a good engineer great, and a bad engineer dangerous!”
Robert D. Cook, Professor of Mechanical Engineering, University of Wisconsin, Madison

5.5 有限要素解析結果のチェック方法

有限要素解析は、モデル化が正しく、入力データが正しい場合に限って正しい結果が得られる。モデル化とデータ作成の段階で間違いが入り込む余地は非常に多い。大量のデータを作成し、入力するので間違いが起きるのは必至である。拘束条件、結合条件、荷重条件の与え方も難しい。最初から正しい結果が得られることはありえないと銘記すべきである。したがって、解析結果が正しいかどうかをチェックすることが極めて重要になってくる。本項では、結果をどうやってチェックするかについて基本的な方法を説明する。

5.5.1 解析が流れるようになるまで

モデルを作成して、NASTRAN を流しても最初のうちは解析が最後まで流れない。結果が出るようになるまでがたいへんである。結果が出るようになるまでに注意すべきことを以下に示す。

- 拘束条件の確認
 - じゅうぶんな拘束条件を与えているか。剛体変位が可能でないか。
- 剛性の確認
 - モデルに必要な剛性を与えてあるか。たとえば、せん断パネルだけでは軸方向の荷重がとれない、膜要素だけでは面外方向の荷重がとれないので、連立方程式が不定になってしまい、解けない。
- “AUTOSPC”は使うな
 - 解析が流れないからといって安易に“AUTOSPC”（連立方程式が不定になった場合に自動的にモデルを拘束して方程式を解けるようにする機能）を使ってはならない。

5.5.2 解析結果のチェック・リスト

解析が流れてもその結果が正しいことを徹底的にチェックする必要がある。有限要素解析結果のチェック・リストを以下に示す。

- 変位図を描いておかしな変形をしていないかチェックする。観点は、
 - 変形は妥当か。
 - 不連続な変形はないか。
 - 極端に大きな変位はないか。
 - 拘束点（Single Point Constraint, SPC）の変形はおかしくないか。
 - 結合点（Multi-Point Constraint, MPC）の変形はおかしくないか。
- 反力（Reaction）をチェックする。観点は、
 - 反力の方向は妥当か。
 - 反力の値のオーダーは妥当か。
 - 反力の合計は外力の合計と釣り合っているか。
- 応力の分布図を描いておかしな分布をしていないかチェックする。観点は、
 - 応力の分布は予想どおりか。
 - 応力の向きはおかしくないか。
- 内部荷重（軸力、せん断力、曲げモーメント等）の分布を描いておかしな分布をしていないかチェックする。観点は、
 - 内部荷重の分布は予想どおりか。梁理論やせん断場理論による結果と矛盾しないか。
 - 内部荷重の向き（符号）はおかしくないか。

梁理論やせん断場理論に基づいて変形や内部荷重分布の予想ができないと有限要素解析の結果のチェックができないことを理解してほしい。構造力学の基本のマスターが重要であるゆえんである。

5.6 航空機構造の FEM モデル化の方法

航空機構造の FEM モデルの作成方法については Ian Taig の解説（文献[2-17]）がとても有用である。この文献の翻訳を公開した（「航空機構造の FEM モデル作成のルール」（訳：滝敏美））ので参考にされたい。

5.7 FEM 解析結果の使い方

構造の内部荷重を求める手段として有限要素解析を使用した場合に、解析結果を強度計算でどう使うかを説明する。

5.7.1 要素力と節点力

有限要素解析の結果として、要素の応力（Element Stress）、要素力（Element Force）、節点力（Grid Point Force）を出力することができる。強度計算に使うのは要素力と節点力であるが、この両者の違いを知っておくことが重要である。簡単のためにせん断パネル要素 SHEAR と棒要素 ROD で構成されたモデル（図 5-11）を考える。SHEAR の要素力は要素の平均せん断流と各辺のせん断流である。ROD の要素力は軸力である。有限要素法では ROD の軸力は要素内一定なので平均軸力が出力され、要素内の最大軸力ではない。要素の両端の軸力を出すには、隣接するせん断パネルのせん断流分を補正してやる必要がある。反力 R は SHEAR 要素と ROD 要素の節点力を足したもので正しい値となっている。

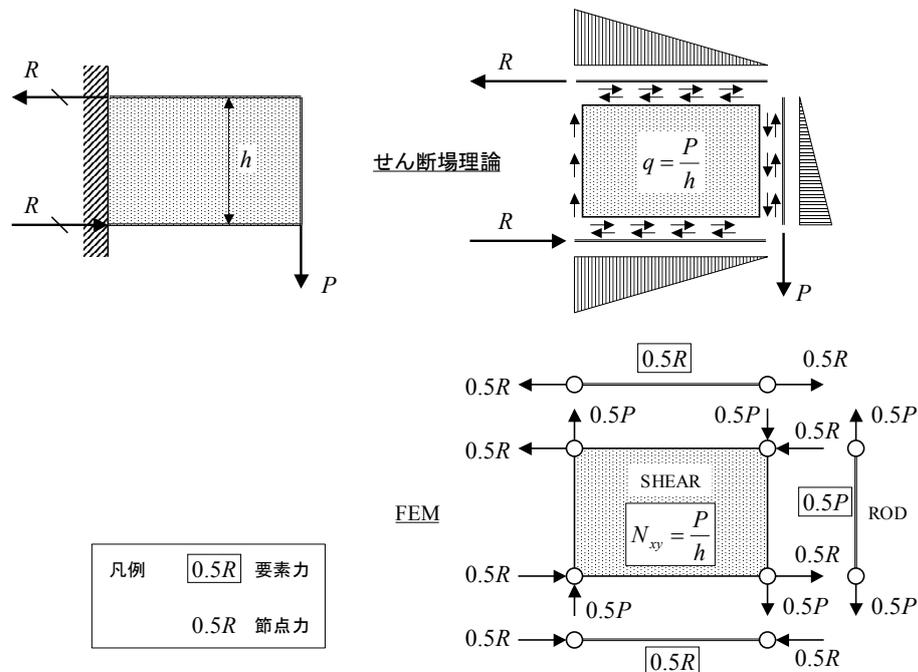


図 5-11 要素力と節点力

5.7.2 せん断場理論との比較

航空機工業界ではセミモノコック構造の解析にせん断場理論が用いられてきた。せん断場理論は、棒（軸力部材）とせん断パネルでモデル化する。この考え方はそのまま全機レベルの FEM モデルにも適用できる。特に FEM が開発された初期には、このモデル化が主流であった。最近では、性能のよい板要素（QUADR）が開発されたので、全機レベルのモデルにせん断パネルのかわりに板要素を用いることが多くなってきている。しかし、荷重の流れを理解するには従来の棒とせん断パネルによるモデルがわかりやすいので、ここでは基本的な構造について ROD 要素と SHEAR 要素による FEM 解析とせん断場理論との比較を示す。

5.7.2.1 せん断梁のモデル化の比較

図 5-12 に示す I 型断面の片持ちせん断梁について、せん断場理論との比較を行う。

(1) せん断パネル要素 SHEAR を使ったモデル化

フランジを棒要素 ROD で、ウェブをせん断パネル要素 SHEAR でモデル化する。モデルを安定化するために、ウェブの境界に ROD 要素を入れる必要がある(図 5-13)。SHEAR 要素には上下方向の剛性がないので、ROD がないと、上下のフランジ間の距離が保てず、モデルが不安定になる。NASTRAN では、要素特性データ PSHEAR で軸剛性の係数 F1, または F2 に数値を入れることで、この ROD の代わりにすることができる。

モデルとして、以下の 2 種類を検討する。

モデル A: ウェブを 5 分割。フランジの ROD の断面積はフランジの断面積と同じ 100 mm^2 とし、ウェブの曲げ剛性を無視する。この条件は、ウェブがせん断座屈する場合を考えている。

モデル B: ウェブを 5 分割。ウェブの曲げ剛性を考慮する。I 型断面の断面 2 次モーメントと等価になるように、フランジの ROD の断面積を

$$A_{ROD} = \frac{I}{2\left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{708333}{2 \times 50^2} = 141.7 \text{ mm}^2 \text{ とする。}$$

NASTRAN では、SHEAR 要素の要素特性 PSHEAR の軸剛性の係数 F1, または F2 に $\frac{1}{3}$ を

入れることによりウェブの曲げ剛性を考慮することができる。

(2) 解析解

梁理論で解析解を求めると、右端の変位は次のようになる。

$$v = \frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl}{Gth}$$

ここで、ヤング率 $E = 70000 \text{ MPa}$, せん断弾性係数 $G = 26923 \text{ MPa}$

ウェブ板厚 $t = 2.5 \text{ mm}$, ウェブ高さ $h = 100 \text{ mm}$

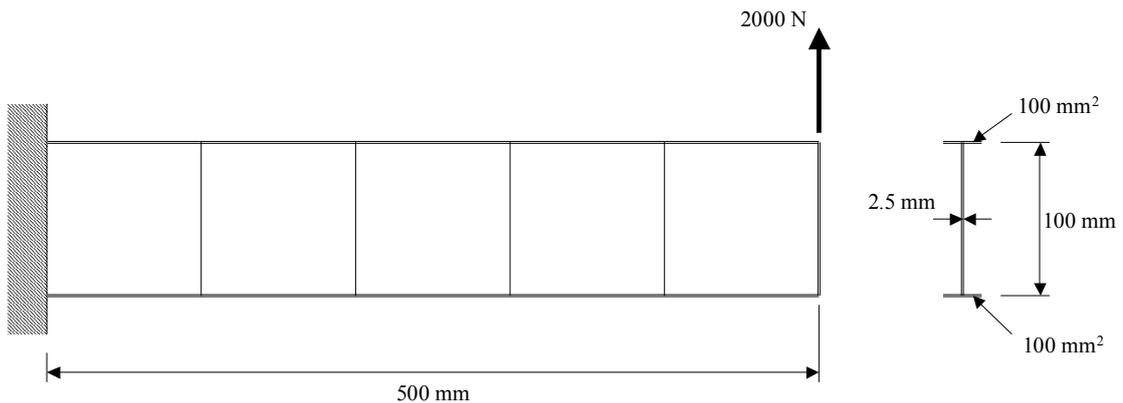


図 5-12 片持ちせん断梁

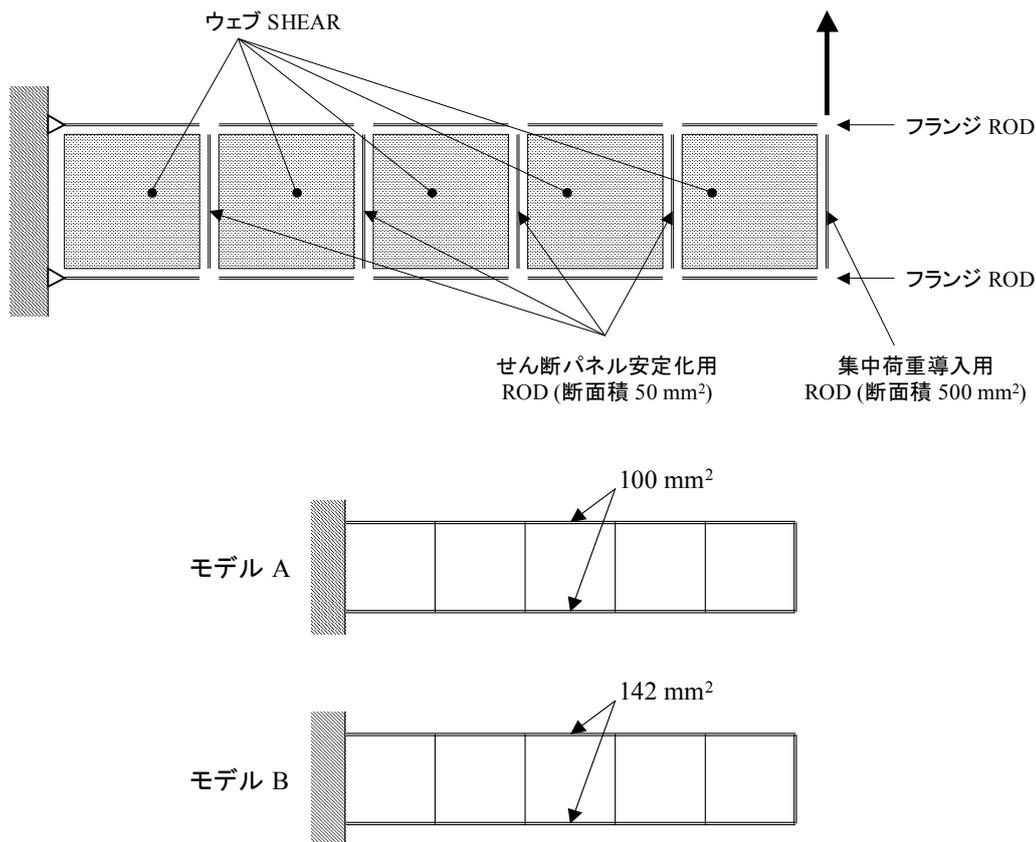


図 5-13 せん断パネル要素によるモデル化

(3) 比較

FEM 解析による変形を図 5-14 に示す。荷重負荷点の変形の比較を表 5-1 に示す。解析はウェブが曲げに有効であるとしているので、FEM のモデル B の結果が解析値と一致している。モデル A はウェブが曲げに効かないとしているので、変形が大きくなっている。

FEM により求めた要素力と節点力を図 5-15 に示す。要素力と節点力はモデル A とモデル B で同じになっている。FEM で求めたせん断パネルのせん断流はせん断場理論と一致する。FEM によるフランジの軸力は、要素内で一定で、せん断場理論によるフランジ軸力の中央の値（または平均値）と一致している。FEM で求めた軸力は部材内の最大値ではないので、要素力をそのまま使うと非安全側の強度計算となることに注意すること。強度計算をする際には、隣接するせん断パネルのせん断流を使って要素の端の軸力を求める必要がある。

節点における節点力の釣り合い（Grid Point Force Balance）を図 5-16 に示す。外力、反力も含めて節点に働く力が釣り合っていることがわかる。

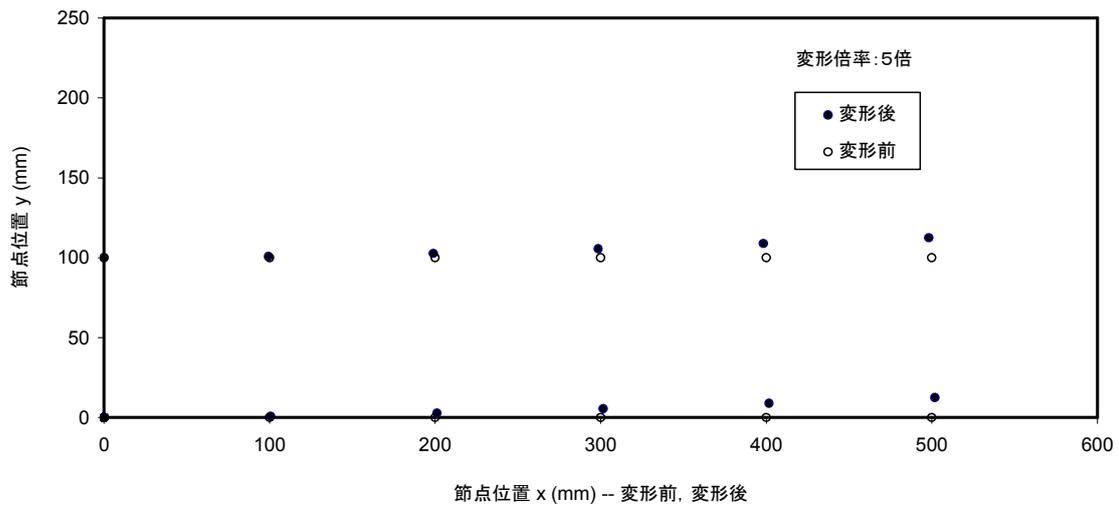


図 5-14 変形 - SHEAR 要素によるモデル化, モデル A

表 5-1 最大変位の比較

モデル種類	モデル名	ウェブ要素分割数	フランジ断面積 (mm ²)	変位 -- FEM (mm)	変位 -- 解析値			FEM/解析値
					曲げ変形 (mm)	せん断変形 (mm)	合計 (mm)	
SHEAR + ROD	モデル A	5×1	100.0	2.504	1.681	0.149	1.829	1.369
	モデル B	5×1	141.7	1.811				0.990

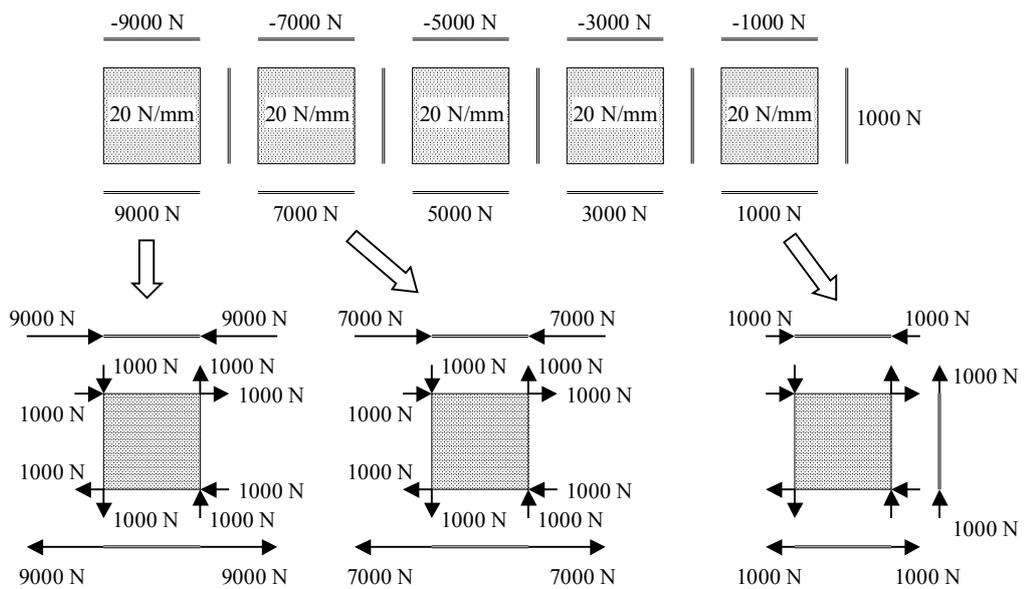
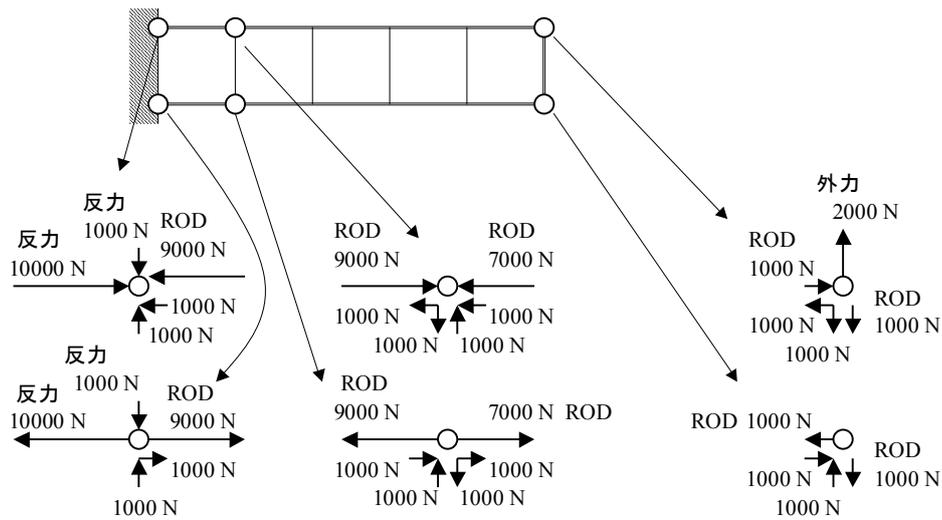


図 5-15 要素力と節点力 - モデル A, B



節点における力の釣り合いを表す。
要素から節点に入る力で示す。

図 5-16 節点力の釣り合い - モデル A, B

5.7.2.2 壁構造の比較

図 4-79 の壁構造を FEM で解析する。SHEAR 要素と ROD 要素で図 5-17 のようにモデル化した。この問題では、ウェブを区切るために断面積の小さなダミー要素を使う必要がある。FEM で解析するには、部材の板厚、断面積、材料特性が必要なので、図中に示した値を使う。

変形を図 5-18 に、要素力と節点力を図 5-19 に示す。前項でも説明したように、ROD 要素の要素力は要素の中心の値であるので、隣接するせん断パネルの節点力を使って ROD 要素の両端の軸力を計算できる。FEM 解析による内部荷重はせん断場理論で求めた内部荷重（図 4-81）とほとんど一致する。両者にわずかな差が出る理由は、せん断場理論は全コンプリメンタリ・エネルギー最小の原理に基づいていることに対し、FEM は全ポテンシャル・エネルギー最小の原理に基づいているためである。

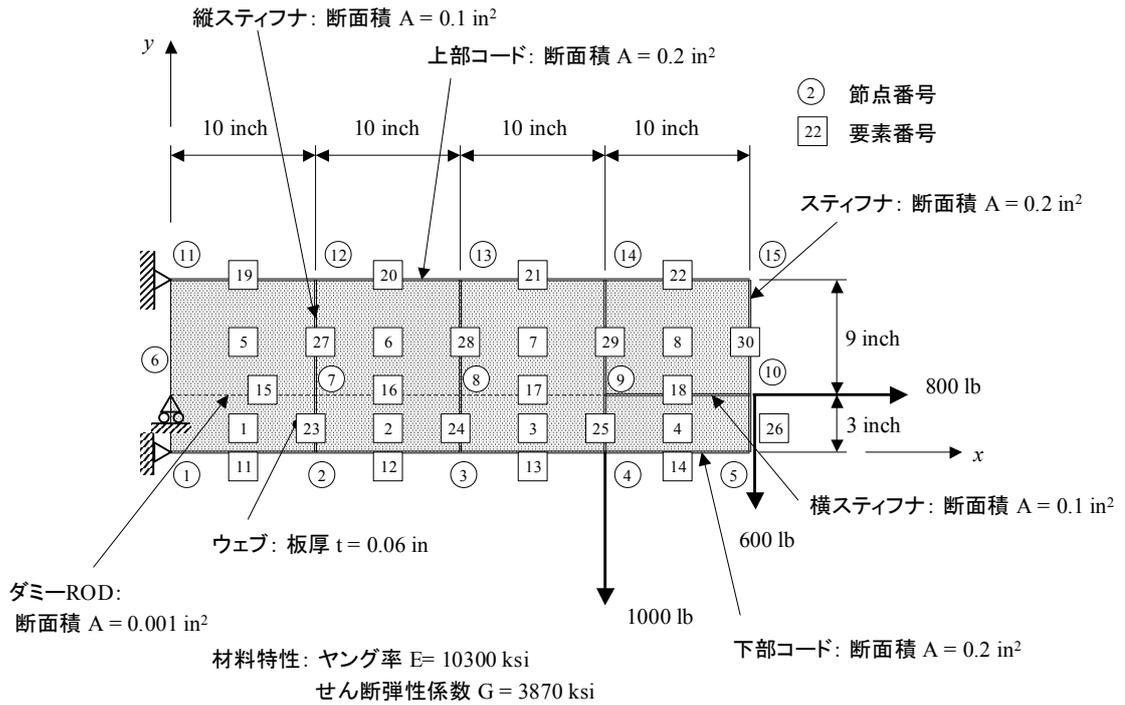


図 5-17 壁構造 (3) の FEM モデル

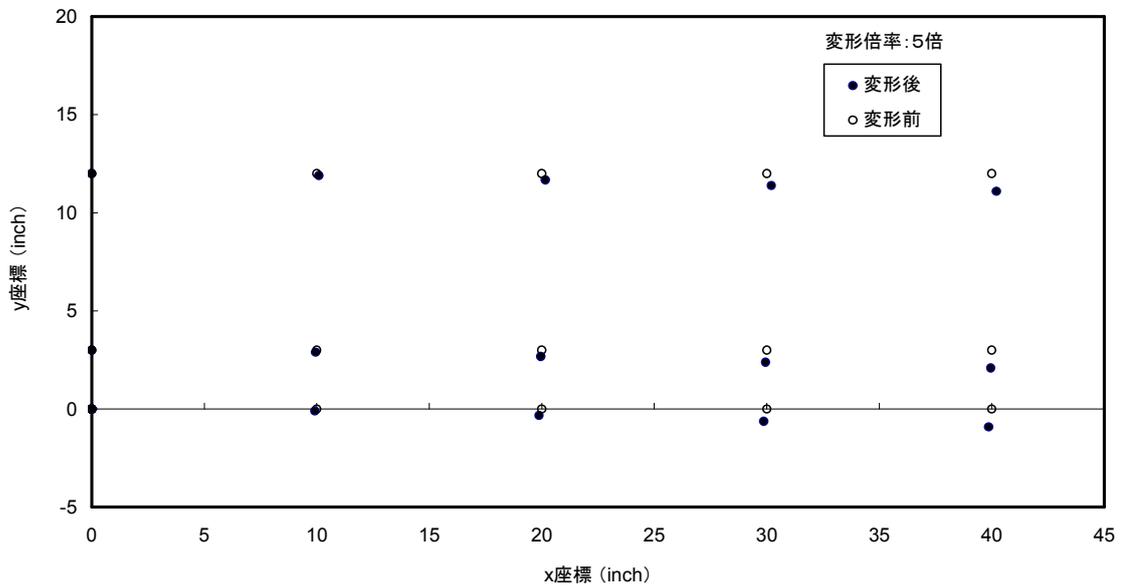


図 5-18 壁構造 (3) の変形図

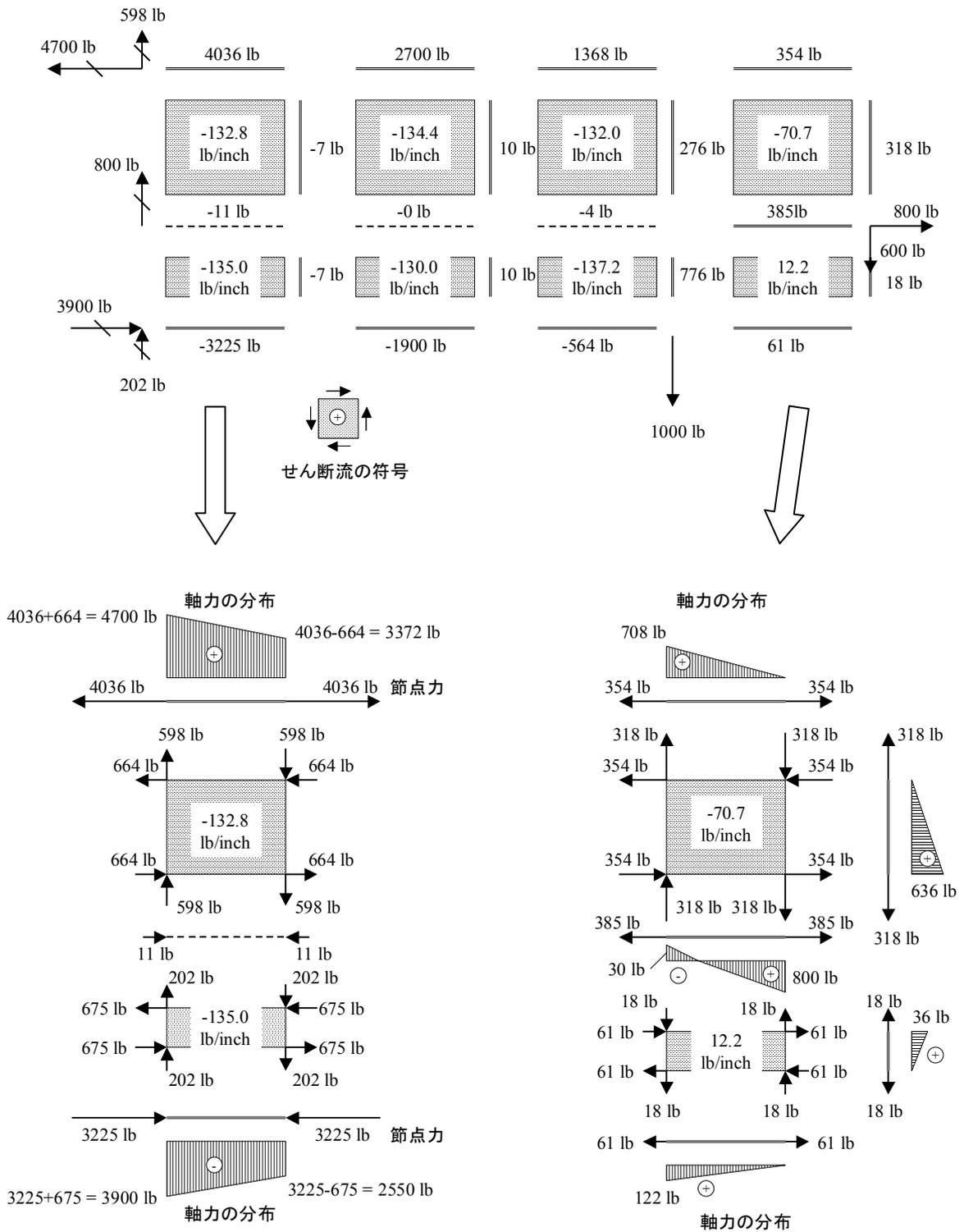


図 5-19 壁構造 (3) の要素力と節点力

5.7.2.3 テーパーしたせん断梁の比較

図 4-86 に示す高さがテーパーしたせん断梁を FEM で解く。図 5-20 に FEM モデルを示す。変形を図 5-21 に、要素力を図 5-22 に示す。FEM 解析では、SHAER 要素の各辺に働くせん断流を出力することができる。せん断流、軸力ともせん断場理論の結果と一致している。ROD 要素の軸力分布は SHEAR 要素の辺のせん断流と ROD の要素力から計算することができる。節点力から計算することもできるが、ROD 要素の向きが傾いているので、座標変換が必要である。

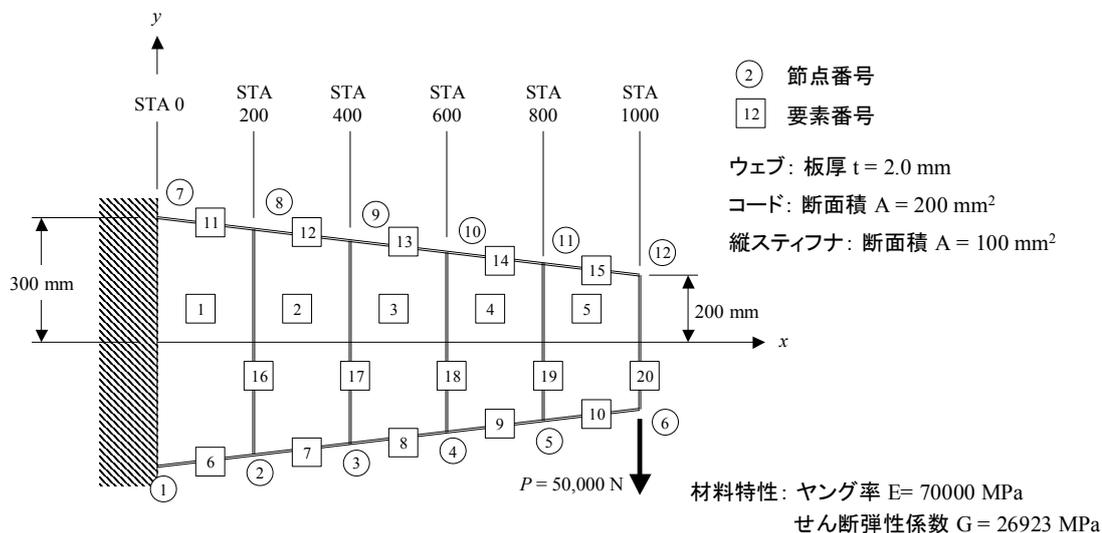


図 5-20 テーパー梁の FEM モデル

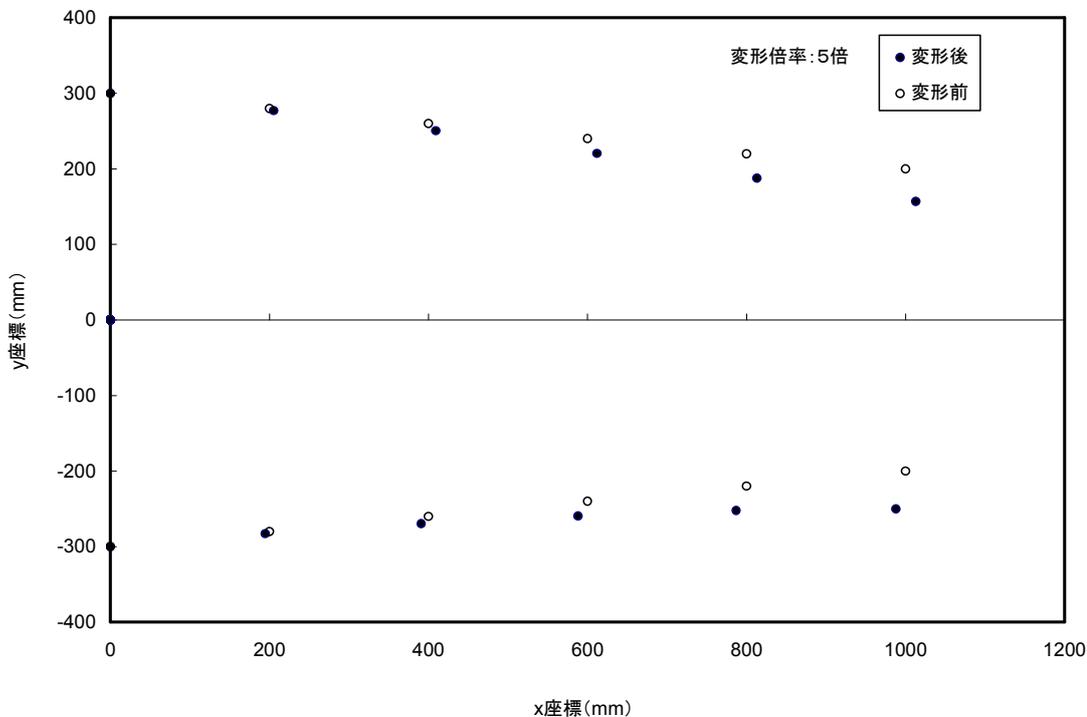


図 5-21 テーパー梁の変形

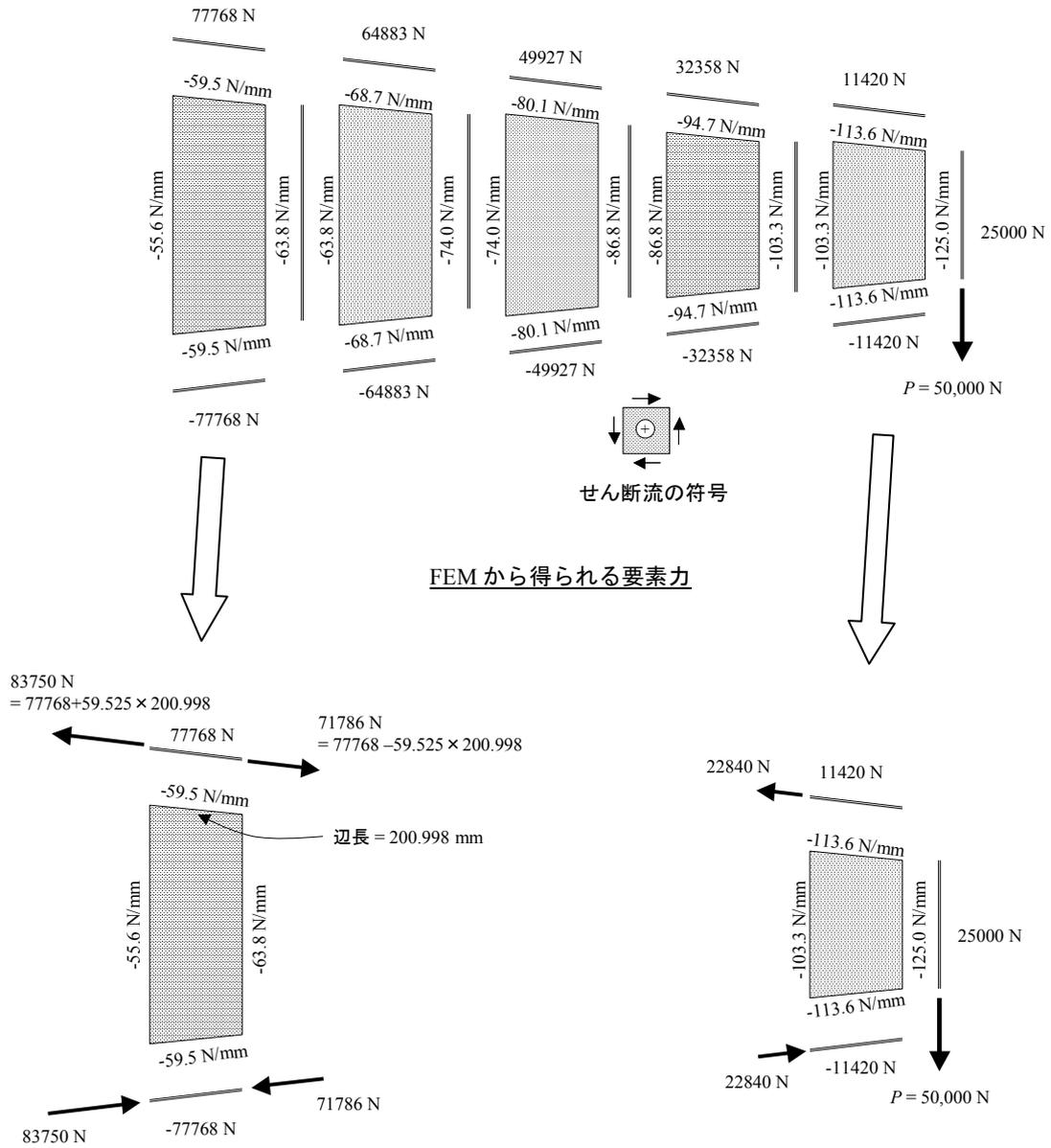


図 5-22 テーパー梁の要素力

5.7.2.4 切り欠きのあるせん断梁の比較

図 4-87 に示す切り欠きのあるせん断梁を FEM で解く。FEM モデルを図 5-23 に示す。変形を図 5-24 に、要素力と節点力を図 5-25 に示す。せん断場理論の結果とほぼ一致していることがわかる。

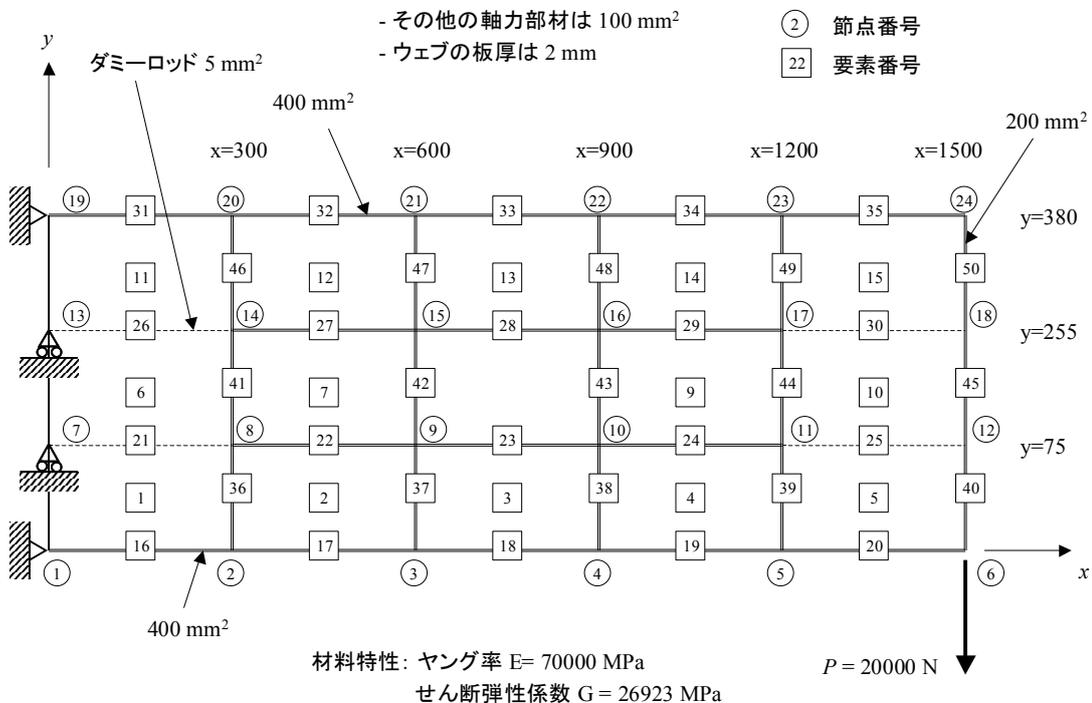


図 5-23 切り欠きのあるせん断梁の FEM モデル

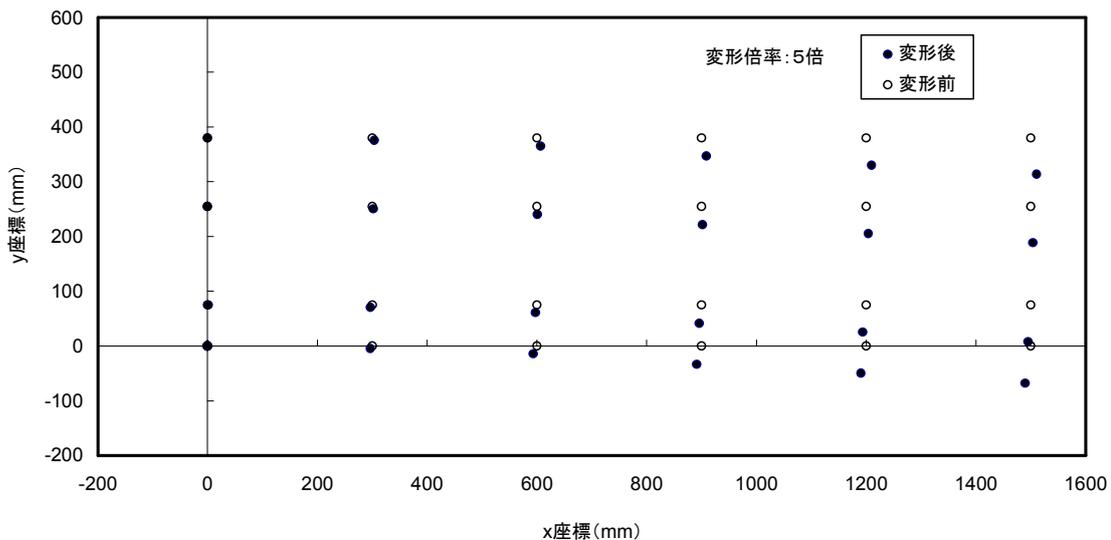


図 5-24 切り欠きのあるせん断梁の変形

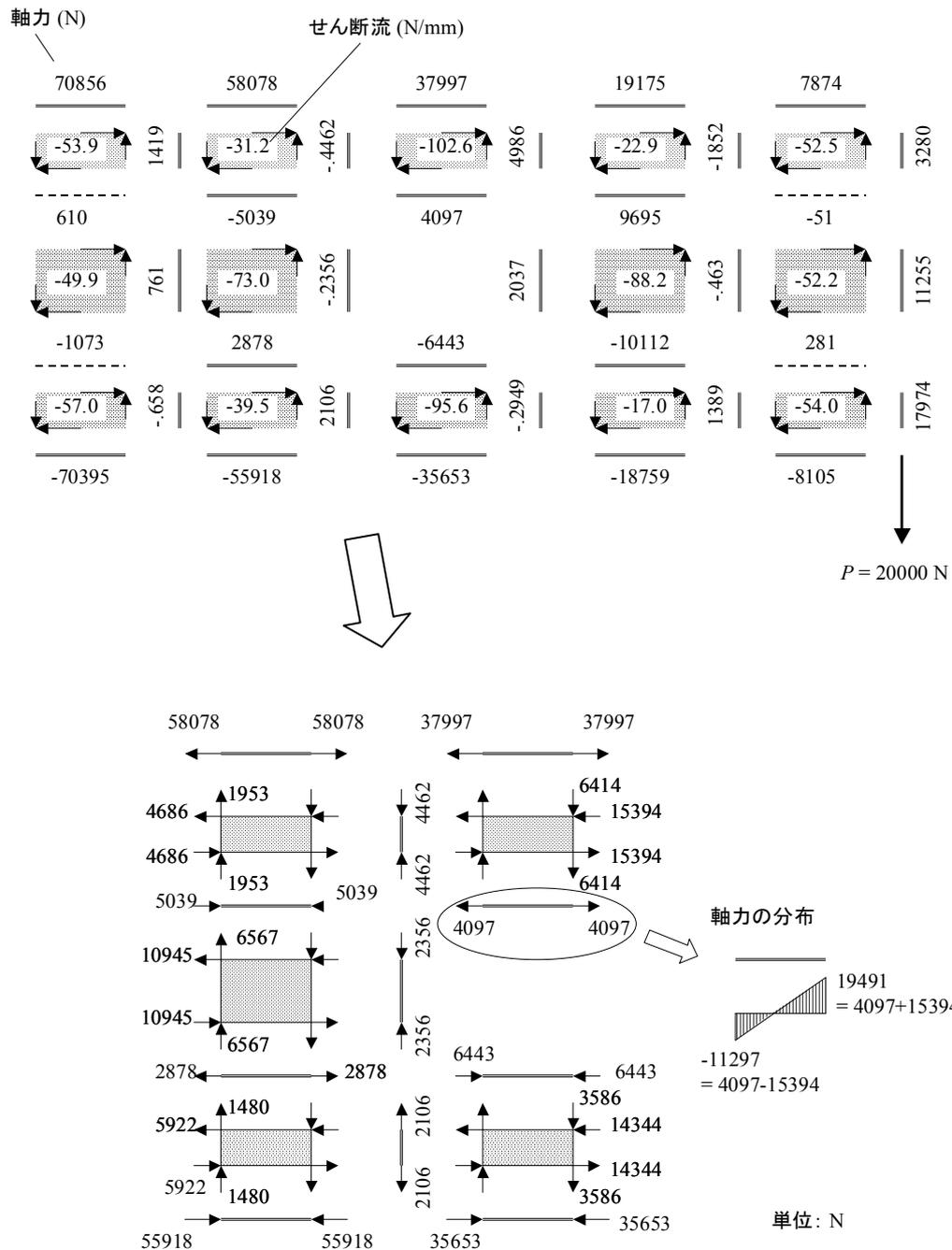


図 5-25 切り欠きのあるせん断梁の要素力と節点力

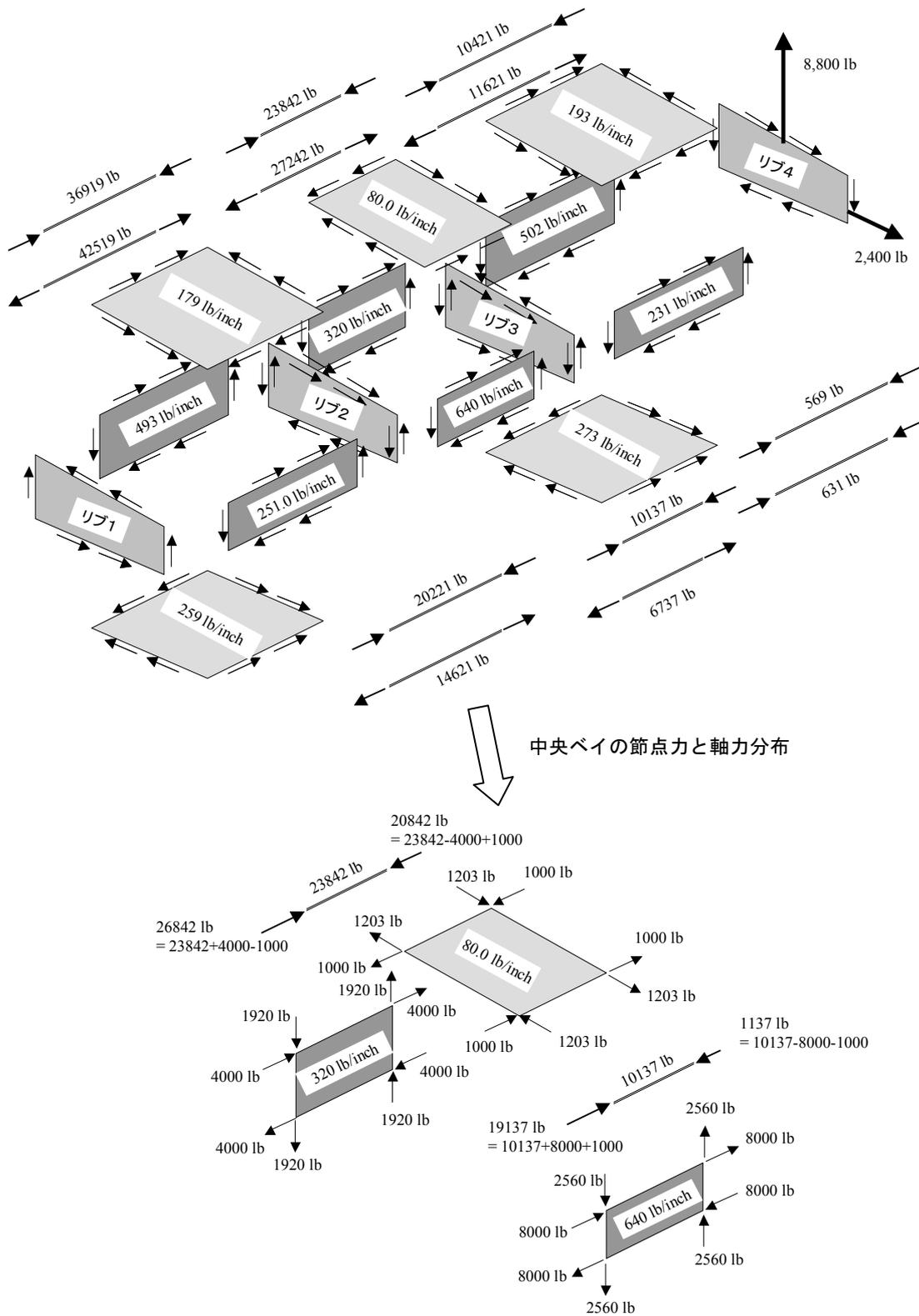


図 5-27 切り欠きのある箱桁梁の要素力と節点力